Ders 6

Olasılık Teorisi

Permutasyonlar ve Kombinasyonlar

- Geçtiğimiz 5 hafta boyunca serilerin temel özelliklerini gösteren grafiklerin neler olduğunu ve
- Serilerin temel özelliklerini anlamada kullanılan istatistiklerin neler olduğunu ve bunların nasıl hesaplandığını gördük.

OLASILIK KURAMI

- Önümüzdeki haftalarda ise olasılık kuramı ile ilgileneceğiz
- Olasılık kuramı şansa bağlı olaylarla ilgilenen bir matematik dalıdır

Örnek Uzaylar, Örnek Noktalar ve Olaylar

Tanım: Bir deneyin tüm olası sonuçlar kümesi S, örnek uzay olarak tanımlanır. Bir örnek uzaydaki bir örnek elemana örnek nokta denir.

Örnek:

- Bir zarın atılmasıyla elde edeceğimiz sayı 1, 2, 3, 4, 5, 6 dan biri olacaktır:

  S={1, 2, 3, 4, 5, 6} dır.
- Alfabemizden rasgele bir harf seçersek

  S={A, B, C, … ,Z} dir.

Örnek Uzaylar, Örnek Noktalar ve Olaylar

- Bir paranın tek atılışı için örnek uzayı ise

  S={Yazı, Tura}
- Rasgele bir erkek seçip boyunu ölçersek, $S=\{x \mid x>0\}$ elde ederiz.

Örnek: Beş, on ve yirmi beş kuruş atılması deneyi için Örnek Uzay:

S={TTT, TYT, YTT, TTY, YYT, YTY, TYY, YYY}

Örnek Uzaylar, Örnek Noktalar ve Olaylar

Örnek: Kırmızı ve siyah renkli iki zarın atılmasından oluşan bir deneyde kırmızı zar için elde edilen sonuç k, siyah zar için elde edilen sonuç s olsun. Bu durumda S örnek uzayı, her biri 1, 2, 3, 4, 5, 6 değerini alabilen (k,s) çiftlerinin kümesidir.

$$S= \{(k,s) \mid 1 \le k \le 6 \text{ ve } 1 \le s \le 6\}$$

İki zar deneyi için örnek uzay

k\s	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Örnek Uzaylar, Örnek Noktalar ve Olaylar

Tanım: Bir "olay", herhangi bir deney için S örnek uzayın bir alt kümesidir.

- Bir olay, S örnek uzayın bir alt kümesi olduğundan S'nin kendisi ve ø (boş küme) de birer olaydır
  - S'ye kesin olay,
  - ø 'ye olanaksız olay denir.

Örnek Uzaylar, Örnek Noktalar ve Olaylar

ÖRNEK:

Bir paranın üç kez atılması deneyinde "*üç tura elde edilmesi*" bir olay, "*üç yazı elde edilmesi*" diğer bir olaydır.

A: Üç tura elde edilmesi olayı

B: Üç yazı elde edilmesi olayı

Örnek Uzaylar, Örnek Noktalar ve Olaylar

ÖRNEK:

Bir zarın atılması deneyinde "tek sayı gelmesi" bir olay,"çift sayı gelmesi" diğer bir olaydır.

A: Tek sayı gelmesi olayı

B: Çift sayı gelmesi olayı

Rassal Olay

Tanım: Gerçekleşmesi rastlantıya bağlı olan olaya rasgele ya da rassal olay denir.

- Bir desteden bir oyun kartı seçildiğinde, maça ikilisinin gelmesi,
- Bir zar atıldığında 4 gelmesi,
- Gelecek yıl buğday üretiminin verilmiş iki sınır arasında bulunması

olayları kesin değildir ve rastlantıya bağlıdır.

Rassal Olay

Örnek: Bir paranın iki kez atılması deneyini düşünelim. Bu deneyin örnek uzayı:

S= {TT, TY, YT, YY}

- **Her iki atışta aynı yüzün elde edilmesi olayı,**

A={YY, TT}

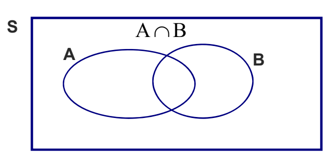
A kümesi S örnek uzayının bir alt kümesidir.

Rassal Olayların Birleşimi

Belli olaylar (kümeler) birleştirilerek yeni olaylar (kümeler) bulunabilir.

- Olay “A veya B”

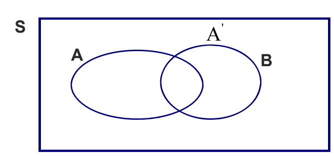
A ve B iki olaysa $A \cap B$ de bir olaydır. $A \cap B$ nin elde edilmesi için gerek ve yeter koşul hem A hem de B olayının gerçekleşmesi gerekir.



Rassal Olayların Değili

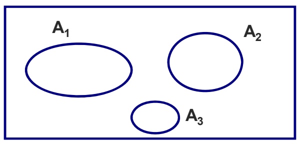
- Olay “A değil”

A bir olaysa, A' de olaydır. A' nın elde edilmesi için gerek ve yeter koşul A nın elde edilmemesidir.



Ayrık Olaylar

Tanım (Ayrık Olaylar): $A_i \cap A_j = \varnothing, \ \forall i \neq j$ ise $A_1, A_2, \ldots, A_n$ olayları ikişerli ayrıktır denir



A_1, A_2 , ve A_3 olayları ikişerli olarak ayrıktır

Örnek Noktalarını Sayma Kuralları

Toplama Kuralı: İki işlem düşünelim. İki işlem ayrık olsunlar. İlk işlem N_1 farklı şekilde ikincisi N_2 farklı şekilde yapılabiliyorsa, işlemlerin biri veya diğeri N_1+N_2 farklı şekilde yapılabilir.

Örnek: Bir zar atalım. Kaç farklı şekilde çift yada tek sayı elde ederiz?

Üçü tek sayıları, diğer üçü çift sayıları göstermek üzere 6 yol vardır. Böylece tek yada çift sayı görünmesi yollarının sayısı 3+3=6 dır.

Toplama Kuralı

Örnek: Bir çantada 4 tane beyaz, 6 tane siyah ve 8 tane kırmızı top vardır. Kaç yoldan 1 beyaz veya siyah ya da kırmızı top çekilebilir?

- Beyaz top 4, siyah top 6 ve kırmızı top 8 farklı şekilde çekilebileceğinden, bir beyaz veya bir kırmızı ya da bir siyah top çekmenin toplam sayısı 4+6+8=18'dir.

Çarpma Kuralı

Çarpma Kuralı: İki işlem düşünelim. İlk işlem N_1 farklı şekilde yapılabiliyorsa ve ilk işlem bu yolların herhangi birinde yapıldıktan sonra ikinci işlem N_2 farklı şekilde yapılabilirse, bu iki işlem birlikte N_1*N_2 farklı şekilde yapılabilir.

Çarpma Kuralı

Örnek: Bir zarı iki kez atalım. Bu deneyin örnek uzayındaki örnek noktalarını belirtiniz.

N_1=6 ve N_2=6 olduğundan örnek noktalarının sayısı 6*6=36'dır.

k\s	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

17

Genelleştirilmiş Çarpma Kuralı

Teorem: K işlem sayısı olsun. İlk işlem N_1 farklı şekilde yapılırsa ve ilk işlemin nasıl yapıldığı önemli değilse, ikinci işlem N_2 farklı şekilde yapılırsa ve nasıl yapıldığı önemli değilse, böylece K işlem için devam edildiğinde; K işlem birlikte $N_1*N_2*N_3*\ldots*N_k$ farklı şekilde yapılır.

18

Genelleştirilmiş Çarpma Kuralı

Örnek: Bir para 3 kez atıldığında, bu deney için örnek uzaydaki örnek noktaların sayısını belirtiniz.

N_1=2, N_2=2, N_3=2 olduğundan
Örnek nokta sayısı 2*2*2=8'dir.

19

Genelleştirilmiş Çarpma Kuralı

Örnek: Bir para atılıyor, bir zar yuvarlanıyor ve iyice karıştırılmış bir desteden bir oyun kartı çekiliyor. Bu deneyin örnek uzaydaki örnek noktalarının sayısını belirtiniz.

N_1=2, N_2=6 ve N_3=52 olduğundan
Örnek noktalarının sayısı 2*6*52=624'tür.

20

PERMÜTASYONLAR VE KOMBİNASYONLAR

Tanım: 1'den n'ye kadar pozitif tamsayıların çarpımına n-faktöriyel denir ve n! olarak yazılır.

n! = 1.2.3.….(n-1).n=(n-1)!.n

Ayrıca

0!=1

1!=1

$$\frac{8!}{6!}=\frac{8.7.6!}{6!}=8.7=56$$

$$12.11.10=\frac{12.11.10.9!}{9!}=\frac{12!}{9!}$$

PERMÜTASYONLAR VE KOMBİNASYONLAR

Tanım: Nesnelerin kümesinin bir kısmının yada tümünün belli bir sıralamasına veya düzenlenmesine permütasyon denir.

Örnek: Bir tiyatro gişesinde bilet almak isteyen üç kişi kaç farklı şekilde gişe önünde sıraya girebilir?

İlk yer 3 farklı şekilde, ikinci yer 2 farklı şekilde, son yer de 1 yolla doldurulur.

3.2.1=6

PERMÜTASYONLAR VE KOMBİNASYONLAR

Teorem: tümü birlikte kullanılan n farklı nesnenin permütasyonlarının sayısı n!'dır.

Bu sayı $_nP_n$=n! Olarak gösterilir.

Örnek: 7 farklı kitap 7 rafa kaç farklı biçimde yerleştirilebilir?

$$_7P_7=7.6.5.4.3.2.1=7!=5040$$

PERMÜTASYONLAR VE KOMBİNASYONLAR

Tanım: n nesnenin bir grubundan bir defada alınan r nesnenin bir sıralanmasına, bu n nesnenin bir permütasyonu denir.

- Böyle permütasyonların toplam sayısı $_nP_r$ ile gösterilir. Burada r<n'dir.

Çarpma kuralından r yer

1) $_nP_r$=n(n-1)(n-2)…(n-r+1) yolla doldurulur.

2) $$_nP_r=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!}=\frac{n!}{(n-r)!}$$

PERMÜTASYONLAR VE KOMBİNASYONLAR

Teorem: **Bir defada r tanesi alınarak yinelenmeden n farklı nesnenin permütasyonlarının sayısı**

$$_{n}P_{r}=\frac{n!}{(n-r)!}$$

Örnek: **Bir televizyon sunucusu haber bülteninde okuması gereken 3 farklı haberden ikisini kaç farklı şekilde sıralayabilir?**

$$_{3}P_{2}=\frac{3!}{(3-2)!}=\frac{3!}{1!}=3.2.1=6$$

25

Kombinasyonlar

Tanım: Bir defada r tanesi alınan n farklı nesnenin bir kombinasyonu, *düzenleme sırasına bakmaksızın* n nesneden r tanesinin bir seçimidir. Bir defada r tanesi alınan n nesnenin kombinasyonlarının sayısı $_{n}C_{r}$, C(n,r), $C_{n,r}$ veya $\binom{n}{r}$ ile gösterilir.

$$_{n}C_{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

26

Kombinasyonlar ile Permütasyonlar Arasındaki İlişki

r nesnenin herbir kombinasyonu r! yolla düzenlenebileceğinden, yani $_{n}C_{r}$ kombinasyonlarının her biri için r! Permütasyon olduğundan permütasyonların toplam sayısı $_{n}C_{r}r!$ dir:

$$_{n}C_{r}r!={}_{n}P_{r}=\frac{n!}{(n-r)!}$$

27

Örnek 3.2.1

Örnek: 4 kitap arasından 3'ünün olanaklı seçimlerini düşünelim.

4 kitaptan 3'ü seçildiğinde, kombinasyonların sayısı, $_{n}C_{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{4!}{3!1!}=4$

ABC, ABD, ACD, BCD

Her bir kombinasyon 3! farklı biçimde oluşturulabileceğinden, toplama kuralı ve genelleştirilmiş çarpma kuralından 3!+3!+3!+3!=4.3!

(Kombinasyonların sayısı).3!=Permütasyonların sayısı

Kombinasyonlar	Permütasyonlar
ABC	ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA
ABD	ABD, ADB, BAD, BDA, DAB, DBA
ACD	ACD, ADC, CAD, CDA, DAC, DCA
BCD	BCD, BDC, CBD, CDB, DBC, DCB

28

Örnek 3.2.3

Örnek: 4 evli çift arasından 3 kişilik bir kurul kaç yolla seçilir?

a) Tümü eşit seçilme şansına sahiptir.

b) Kurulda 2 kadın ve 1 erkek olmak zorundadır.

c) Eşler aynı kurulda bulunamayacaktır.

29

Örnek 3.2.3

a) Sıra önemli olmadığından 8 kişi arasından 3'ünün seçimi düşünülür.

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!.5!} = 56$$

b) 2 kadın $\binom{4}{2}=6$ yolla seçilir, bu seçim yapıldıktan sonra 1 erkek $\binom{4}{1}=4$ yolla seçilir.

Çarpma kuralından

$$\binom{4}{2}\binom{4}{1} = 6.4 = 24$$

30

Örnek

c) Eşler aynı kurulda bulunmayacaklarına göre, kurulda bulunan kişiler eş olmamalıdır. Önce 3 çift, 4 çift arasından $\binom{4}{3}$ yolla seçilir. 3 çift seçildikten sonra, ilk çiftten iki (erkek yada kadın), ikinci çiftten iki, üçüncü çiftten 2 seçim yapılabilir. Çarpma kuralıyla, $\binom{4}{3}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}=32$ yada

$\binom{8}{3}$ **tüm seçim sayısından** $-$ $\binom{4}{1}$ **dört çiftten birinin seçimi** $\cdot$ $\binom{6}{1}$ **geri kalan 6 kişiden birinin seçimi**

$$\binom{8}{3}-\binom{4}{1}\binom{6}{1}=32$$

31

Pascal Kuralı

Teorem: $\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}$ $\quad 1 \le r \le n$ için

İspat:

$$\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}=\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}+\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left(\frac{1}{(n-r+1)}+\frac{1}{r}\right)$$

$$=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left(\frac{r+n-r+1}{r(n-r+1)}\right)$$

$$=\frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!}=\binom{n+1}{r}$$

32

Örnek 3.2.6

- 6 aday temsilci olmak üzere seçim yarışması yapmaktadırlar. Bir seçmen oyunu bir ya da iki adayın adını işaretleyerek kullanabileceğine göre, seçmen oyunu kaç farklı şekilde kullanabilir.

İki ayrık durum söz konusudur: Seçmen 1 aday için yada iki aday için oy kullanılır.

Oy veren seçmen	1 aday için oy verirse	oy pusulasını	$\binom{6}{1}$	farklı şekilde işaretler
	2 aday için oy verirse		$\binom{6}{2}$	

Toplama kuralı ve pascala göre $\binom{6}{1}+\binom{6}{2}=\binom{7}{2}$ farklı şekilde oy kullanır.

Örnek 3.2.8

- A={1,2,…,9} kümesinin

a) 5 elemanlı alt kümelerinin kaçında 6 sayısı bulunmaz?

b) 5 elemanlı alt kümelerin kaçında 1 ve 2 birlikte bulunmaz.

9 elemanlı kümenin 5 elemanlı alt kümelerinin sayısı: $\binom{9}{5}$

6 sayısının bulunduğu 5 elemanlı alt küme sayısı: $\binom{8}{4}$

a) $\binom{9}{5}-\binom{1}{1}\binom{8}{4}=\frac{4}{5}\binom{8}{4}$

b) $\binom{9}{5}-\binom{2}{2}\binom{7}{3}$

3.2.1 Tekrarlı Kombinasyonlar

Teorem: Bir birinden farklı, koşulsuz ve sınırsız olarak tekrarlanabilen n öğenin sıra göz önünde tutularak alınan, k-lı kombinasyonlarının sayısı n^k ya eşittir.

k=2 için, kombinasyonların sayısı n^2 dir. 1, 2, 3, …n öğe verilsin.

11	**12**	**…**	**1n**
21	**22**	**…**	**2n**
.	.		.
.	.		.
.	.		.
n1	**n2**	**…**	**nn**

2-li kombinasyon vardır.

Tekrarlı Kombinasyonlar

Teorem: Birbirinden farklı ve sınırsız olarak tekrarlanabilen n öğenin sıra göz önünde tutulmaksızın k-lı kombinasyonlarının sayısı $\binom{n+k-1}{k}=\binom{n+k-1}{n-1}$

k=2 için 1, 2, 3, …, n farklı eleman düşünülürse

11	**12**	**…**	**1n**
	22	**…**	**2n**
		.	.
		.	.
		.	.
		…	**nn**

$$n+(n-1)+\ldots+3+2+1=\frac{n(n+1)}{2}=\binom{n+1}{2} \text{ dir.}$$

Örnek 3.2.10

- Bir domino oyununda numaralar 0 dan 6 ya kadar değil de 0 dan n ye kadar gitseydi bu dominoda kaç taş bulunurdu?

Sırasız yinelemeli kombinasyon söz konusudur. Burada k=2 dir.

Taş sayısı:

$$\binom{1+n+2-1}{2}=\binom{n+2}{2} \text{ dir.}$$

37

Tümü Birbirinden Farklı Olmayan Nesnelerin Permütasyonu

Teorem: n nesne verilmiş olsun. Bu n nesnenin r_1 tanesi birinci çeşit, r_2 tanesi ikinci çeşit, …, r_k tanesi k-ıncı çeşit olsun. k grup ve her bir grupta sırayla r_1, r_2, …, r_k nesne olacaktır. O halde $r_1+r_2+\ldots+r_k=n$ dir. Tümü birlikte alınan bu n nesnenin farklı permütasyonlarının sayısı

$$\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_k}=\left(\frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_k!}\right) \text{ dir.}$$

38

Örnek 3.3.1

- 52 kartlık standart bir deste 4 oyuncu arasında kaç farklı şekilde dağıtılır.

Oyuncuların her birine 13 kart verileceğinden, olanaklı dağıtımlar

$$\binom{52}{13,13,13,13}=\left(\frac{52!}{13!.13!.13!.13!.}\right)=\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13} \text{ dir.}$$

39

Örnek 3.3.2

- İki kırmızı, üç siyah ve beş beyaz boncuk bir ipe dizilecektir. Aynı renkte olan boncuklar, eşit büyüklükte ve benzer biçimdedirler. Bu 10 boncuk bir ipe kaç farklı şekilde dizilebilir.

$$\binom{10}{5,3,2}=\left(\frac{10!}{5!.3!.2!}\right)=2520$$

40

İki Farklı Cinsteki Öğelerin Permütasyonu

Teorem: n öğenin r tanesi birinci çeşit, geri kalan n-r tanesi ikinci çeşit ise bu n öğenin permütasyonlarının sayısı

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}=\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r} \text{ dir.}$$

41

İki Farklı Cinsteki Öğelerin Permütasyonu

İspat: $\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_k}=\left(\frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_k!}\right)$ teoreminden $r_1=r_2$, r_2=n-r alınırsa sonuç bulunur.

r tane A ve n-r tane B'nin bir sırada düzenleneceğini varsayalım. n boş yerin r tane A ve n-r tane B ile doldurulacağını düşünürüz. A' lar için r yeri $\binom{n}{r}$ yolla seçebiliriz. Kalan n-r boş yer için B ler $\binom{n-r}{n-r}$ yolla seçilebilir. Böylece permütasyonların toplam sayısı $\binom{n}{r}$ dir.

42

Örnek 3.3.3

- "Mississippi" sözcüğünün harfleriyle kaç farklı düzenleme yapılabilir.

11 harften biri m, dördü s, ikisi p, dördü i dir.

Böylece $r_1=1$, $r_2=4$, $r_3=2$

ve $r_4=4$ tür. 11 harfin permütasyonlarının sayısı,

$$\frac{11!}{1!.4!.4!.2!}=34650 \text{ dir.}$$

43

Örnek 3.3.6

- "KARACAKÖK" sözcüğünün iki A harfi yan yana gelmeyecek şekilde kaç permütasyon vardır?

44

Örnek

Önce A harfleri dışındaki harfleri düzenlersek buradaki harflerin tümü birbirinden farklı değildir. Bu nedenle tümü birbirinden farklı olmayan nesnelerin permütasyonu düşünülür.

$$\textit{Altı harfin permütasyon sayısı} = \frac{6!}{3!.1!.1!.1!}$$

$\boxed{A}$ K $\boxed{}$ K $\boxed{}$ K $\boxed{}$ R $\boxed{A}$ C $\boxed{A}$ Ö $\boxed{}$

Örnek

- Yan yana dizilen bu 6 harfin aralarında, başında ve sonunda 7 boş yer vardır. 7 boş yerin 3 A harfi için 3'ünü seçmemiz gerekir.

İki işlem birlikte düşünüleceğinden $\dfrac{6!}{3!.1!.1!.1!}.\dbinom{7}{3}$

Sıralı Parçalanmalar

Teorem: Bir A kümesinde n farklı öğe bulunsun. A'nın (A_1, A_2, …, A_k) formunda farklı sıralı parçalanmalarının sayısı (A_1 de r_1, A_2 de r_2, …, A_k da r_k öğe ve $r_1+r_2+\ldots+r_k=n$ olmak üzere):

$$\frac{n!}{r_1!.r_2!....r_k!} \text{ dir.}$$

Sıralı Parçalanmalar

İspat: A1 içine A daki n öğe arasından r_1 tanesinin seçimi $\binom{n}{r_1}$ yolla yapılır. Ardışık olarak, kalan n-r1 öğe arasından ($A-A_1=A \cap A'_1$ kümesi), A_2 deki r_2 öğenin seçimi $\binom{n-r_1}{r_2}$ yolla yapılır. Benzer şekilde i=3,4,…, k için A_i nin $\binom{n-r_1-r_2-\ldots-r_i-1}{r_k}$ sayıda seçimi vardır.

Sıralı Parçalanmalar

O halde A nın farklı sıralı parçalanmalarının sayısı,

$$\binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_2}\binom{n-r_1-r_2}{r_3}\cdots\binom{n-r_1-r_2-\ldots-r_k-1}{r_k} \text{ dir.}$$

yada

$$\frac{n!}{r_2!(n-r_1)!}\cdot\frac{(n-r_1)!}{r_2!(n-r_1-r_2)!}\cdots\frac{(n-r_1-r_2-\ldots-r_k-1)!}{r_k!(n-r_1-r_2-\ldots-r_k)!}$$

$$ve\ (n-r_1-r_2-\ldots-r_k)!=0! \text{ olduğundan}$$

$$=\frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_k!} \text{ elde edilir.}$$

Örnek 3.4.1

- 9 farklı oyuncak, 4 kardeş arasında en küçüğü 3 ünü diğerleri eşit sayıda olmak üzere kaç farklı şekilde paylaştırılır?

9 oyuncağın sırasıyla 3, 2, 2, 2 oyuncağı içinde bulunduran 4 göze içine sıralı parçalanmalarının sayısını bulmak istiyoruz.

$$\frac{n!}{r_1!.r_2!\ldots r_k!}$$ teoremi gereğince

$$\frac{9!}{3!.2!.2!2!} = 7560 \text{ sıralı parçalanma vardır.}$$

Sırasız Parçalanma

Örnek: Bir sınıfta 12 öğrenci vardır. Her takımda 4 öğrenci olacak şekilde 12 öğrenci A_1, A_2, A_3 gibi üç takıma kaç farklı şekilde parçalanır?

I. Yol:

$$\binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{4}\cdot\frac{1}{3!}=\frac{12!}{4!4!4!}\cdot\frac{1}{3!}=5775 \text{ (sırasız parçalanma)}$$

Sırasız Parçalanma

II. Yol:

A öğrencilerden birini göstersin. O halde A ile aynı takımda olacak diğer 3 öğrenci $\binom{11}{3}$ farklı şekilde seçilir.

Diğer bir B öğrencisi ile aynı takımda olacak 3 öğrenci de geri kalan 7 öğrenci arasından $\binom{7}{3}$ yolla seçilir. Son 4 öğrenci de üçüncü takımı oluşturur. Hep birlikte,

$$\binom{11}{3}\binom{7}{3}\binom{4}{4}=5775 \text{ sırasız parçalanma vardır.}$$

İSTATİSTİK I

Ders 7
Olasılığa Giriş,
Bazı Olasılık Kuralları

Bir Olayın Olasılığı

Tanım: Bir deneyin her biri eşit şansa sahip N tane sonucu olsun. Bu sonuçların M tanesinden herhangi biri gerçekleştiğinde A olayı gerçekleşmiş olsun. A olayının P(A) ile gösterilen gerçekleşme olasılığı

$$P(A) = \frac{\text{Uygun sonuçların sayısı}}{\text{Örnek uzaydaki tüm sonuçların sayısı}} = \frac{M}{N}$$

Örnek 4.1.3

- Bir çantada 4 beyaz 8 siyah top vardır. Bir siyah top çekilmesi olasılığı nedir?

“Siyah top çekilmesi” olayı B olsun. Topların sayısı 12 olduğuna göre istenen olasılık

$$P(B) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Olasılık Aksiyomları

D bir deney ve S bu deneyin örnek uzayı olsun. O halde S deki bir A olayının P(A) olasılığıyla ilgili aşağıdaki aksiyomlar vardır.

A1. P(A) ≥ 0

A2. P(S) = 1

A3. A_1, A_2, …, A_n, … bir S uzayında sonlu ya da sonsuz sayıda ikişerli ayrık olaylar dizisi olsun. Bu durumda

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots \quad \text{dir.}$$

Örnek 4.1.6

- Bir çift zar atılsın. Toplamın 8 gelmesi olasılığı nedir?

Bu deneyin örnek uzayında 36 nokta vardır. Burada 8 gelmesi olayı A olsun. O halde,

$$A = \{(2,6),(3,5),(5,3),(4,4),(6,2)\} \quad \text{uygun sonuçlar kümesi}$$

P(A)=5/36

Olasılığın Frekans Tanımı

Tanım: Bir deney n kez yapıldığında bir A olayı f kez gerçekleşirse, f/n oranına A olayının relatif frekansı denir. n artarken f/n relatif frekansının bir limite yaklaştığını kabul edersek, bu limite A nın olasılığı denir.

Uygulamada büyük n ler için A nın olasılığı f/n ile hesaplanır.

Örnek 4.1.11

- Bir zarın 100 kez atılmasından sonra aşağıdaki sonuçlar bulunmuştur.

Bulunan Sayı	Frekans
1	21
2	18
3	14
4	17
5	10
6	20

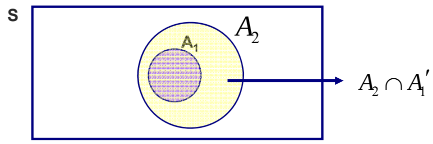
Zarın 1 gelmesi olasılığı nedir?

Bazı Olasılık Kuralları

Teorem 1: A_1 ve A_2, bir S örnek uzayında $A_1 \subset A_2$ olacak biçimde iki olay ise $P(A_1) \le P(A_2)$ dir.

Bazı Olasılık Kuralları

İspat:



A_1 ve $A_2 \cap A_1'$ ayrık olaylar olduğundan $A_2 = A_1 \cup (A_2 \cap A_1')$

$$P(A_2) = P(A_1) \cup P(A_2 \cap A_1')$$

A3 aksiyomundan $P(A_2) = P(A_1) + P(A_2 \cap A_1')$

$P(A_2 \cap A_1') \geq 0$ olacağından

$P(A_2) \geq P(A_1)$

Bazı Olasılık Kuralları

Teorem 2: Herhangi bir $A \subset S$ olayı için $P(A) \leq 1$ dir.

İspat: Teorem 1 gereğince $P(A\ ) \leq P(S)$ dir.

P(S)=1 olduğundan P(A)≤1 dir.

Bazı Olasılık Kuralları

Teorem 3: A, bir S örnek uzayında herhangi bir olay olsun. $P(A) = 1 - P(A')$ dır.

İspat: $A \cup A' = S$ A' ve A ayrık olaylar olduğundan

Aksiyom 3 ten $P(A) + P(A') = P(S)$

Aksiyom 2 den $P(A) + P(A') = 1$ olacağından

$P(A) = 1 - P(A')$ olur.

Örnek 4.2.1

- Bir para 3 kez atılsın. En az bir kez tura gelmesi olasılığını bulunuz.

$P(A')=1-P(A)$ olduğundan, A yı düşündüğümüz gibi A nın tümleyenini de düşünebiliriz. A' ne uygun yalnız bir örnek noktası YYY vardır. Buna göre,

$$P(A) = 1 - P(A')$$
$$= 1 - 1/8$$
$$= 7/8 \text{ dir.}$$

Bazı Olasılık Kuralları

Teorem 4: P(Ø)=0 dır.

İspat:

Ø' =S dir. P(Ø')=1 ve P(Ø')=1-P(Ø) olduğundan

P(Ø)=0 olur.

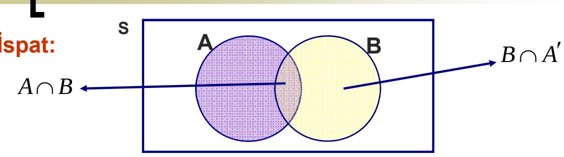
Bazı Olasılık Kuralları

Teorem 5: A ve B, S örnek uzayında iki olay olsun.

$$\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \text{ dir.}}$$

Bazı Olasılık Kuralları

İspat:



$$A\cup B=A\cup(B\cap A') \text{ ve } B=(A\cap B)\cup(B\cap A')$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B\cap A') \text{ ve} P(B)=P(A\cap B)\cup P(B\cap A')$$
$$P(B\cap A')=P(B)-P(A\cap B)$$

$$\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$$

Örnek 4.2.3

- 52 kartlık standart bir desteden rasgele bir kart çekildiğinde, bu kartın bir birli veya karo olması olasılığı nedir?

"Karo çekilmesi" olayı A, "Birli (As) çekilmesi" olayı B olsun. Bu örnek uzayda 52 örnek nokta vardır.

$$P(A)=13/52, \quad \mathrm{P(B)}=4/52, \quad \mathrm{P(A\cap B)}=1/52 \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned} P(A\cup B) &= P(A)+P(B)-P(A\cap B) \\ &= \frac{13}{52}+\frac{4}{52}-\frac{1}{52} \\ &= \frac{16}{52} \end{aligned}$$

Sonuç 4.2.5.1

E_1, E_2, E_3, bir S örnek uzayında 3 olay ise,

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2)$$
$$-P(E_1 \cap E_3) - P(E_2 \cap E_3) + P(E_1 + E_2 + E_3)$$

17

İspat

$E_1 \cup E_2 = A$ alınır ve teorem 5 uygulanırsa

$P(A \cup E_3) = P(A) + P(E_3) - P(A \cap E_3)$ yazılır.

Bu eşitlikte

$$P(A) = P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

ve

$$P(A \cap E_3) = P((E_1 \cap E_3) \cup P(E_2 \cap E_3))$$
$$= P(E_1 \cap E_3) + P(E_2 \cap E_3) - P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$$

eşitlikleri kullanılırsa istenen sonuç bulunur.

18

Genel Sonuç

Genel olarak A_1, A_2, …, A_n rasgele olaylarsa

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j) + \ldots +$$
$$\sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

yazılır.

19

Bazı Olasılık Kuralları

Teorem 6: A_i ler (j=1, 2, …, n) bir S örnek uzayında olaylarsa

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n} Aj\right) \le \sum_{j=1}^{n} P(Aj)$$

20

Sonlu Sayıda Elemana Sahip Örnek Uzaylar

- Şu ana dek ele aldığımız örneklerde sonlu ya da ***sayılabilir*** sayıda eleman içeren örnek uzayları inceledik
- Sayılabilir sayıda eleman içeren örnek uzayların özellikleri

i. Her $p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m$

ii. $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$

Sayılabilir Sayıda Elemana Sahip Örnek Uzaylar

- S sayılabilir sonsuzlukta eleman içeren bir örnek uzay olsun:

$$S = \{a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots\}$$

- Sonlu sayıda elemanı olan bir örnek uzayda olduğu gibi

i. Her $p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \ldots$

ii. $p_1 + p_2 + \ldots + p_m + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

4.2.1 Sürekli Örnek Uzaylar ve Geometrik Olasılık

Örnek 4.2.4: Tura gelinceye kadar bir paranın atılması deneyi için

$$S = \{1, 2, 3, \ldots, m, \ldots, \infty\}$$

örnek uzayını düşünelim.

n: para tura gelene dek yapılan atış sayısı olsun

$$p(1) = 1/2,\ p(2) = 1/4, \ldots,\ p(n) = 1/2^n, \ldots,\ p(\infty) = 0$$

Sürekli Örnek Uzaylar ve Geometrik Olasılık

Örnek uzay sayılabilir değilse bu durumda sürekli örnek uzay uzunluk, alan, hacim gibi sonlu bir geometrik ölçüme sahiptir. Bu ölçüm m(S) ile gösterilirse bir A olayının olasılığı, (A'ya ait tüm noktaların olasılığı);

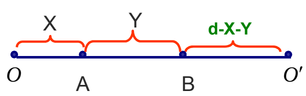
$$P = \frac{m(A)}{m(S)} \text{ dir.}$$

$$P(A) = \frac{A'\text{nın uzunluğu}}{S'\text{nin uzunluğu}} \qquad P(A) = \frac{A'\text{nın alanı}}{S'\text{nin alanı}} \qquad P(A) = \frac{A'\text{nın hacmi}}{S'\text{nin hacmi}}$$

Böyle tanımlanan olasılık uzayına **uniform** (düzgün) **uzay** denir.

Sürekli Örnek Uzaylar ve Geometrik Olasılık

Örnek 4.2.5 : Uzunluğu d olan bir doğru parçası üzerinde rasgele iki nokta işaretleniyor. Elde edilen üç parça ile bir üçgen oluşturma olasılığı nedir?

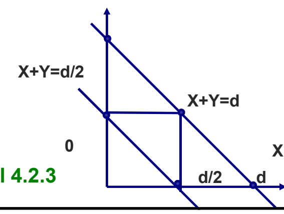


Şekil 4.2.2

Sürekli Örnek Uzaylar ve Geometrik Olasılık

Bir üçgenin iki kenarının toplamı üçüncü kenardan büyük, farkı üçüncü kenardan küçük olmalıdır. Olanaklı değerler: $0 \le x+y \le d$ dir. Üçgen elde etmek için uygun değerler:

$$\boxed{x \le \frac{d}{2}, \quad y \le \frac{d}{2}, \quad x+y \ge \frac{d}{2}}$$



Şekil 4.2.3

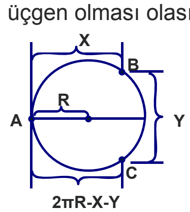
İstenen Olasılık:

$$P = \frac{\frac{d}{2}\cdot\frac{d}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{d^2}{2}} = \frac{S_1}{S} = \frac{1}{4}$$

Sürekli Örnek Uzaylar ve Geometrik Olasılık

Örnek 4.2.6: R yarıçaplı bir çember üzerinde rasgele üç nokta yerleştirilmiştir. Bu üç nokta ile çizilen ABC üçgeninin dar açılı üçgen olması olasılığı nedir?

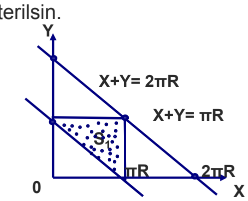
Şekil 4.2.4



Sürekli Örnek Uzaylar ve Geometrik Olasılık

AB yayı x, BC yayı y ile gösterilsin.

Olanaklı değerler: $0 \le x+y \le 2\pi R$



Uygun değerler: x ≤ πR, y ≤ πR ve x+y ≥ πR

$$\boxed{P = \frac{\frac{\pi R.\pi R}{2}}{\frac{2\pi R.2\pi R}{2}} = \frac{1}{4}}$$ olarak bulunur.

4.3 Koşullu Olasılık

- Bir A olayının olasılığı ile ilgilendiğimizi varsayalım ve
- A'dan farklı bir B olayının gerçekleşmiş olduğu ek bilgi olarak verilmiş olsun.
- A'nın olasılığının, B hakkındaki ek bilgiden nasıl etkilendiğini bilmek istiyoruz.

29

Koşullu Olasılık

A ve B, bir S örnek uzayında iki olay olsun. B verilmişken, A olayının koşullu olasılığı P(A/B) aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},\quad (P(B)\neq 0 \text{ ise})$$

Benzer şekilde

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)},\quad (P(A)\neq 0 \text{ ise})$$

30

Koşullu Olasılık

- Buradan

$$\boxed{P(A\cap B)=P(B).P(A/B)}$$

$A\cap B=B\cap A$ olduğundan

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A).P(B/A)}$$

da yazabiliriz

31

Koşullu Olasılık

Örnek 4.3.1: 52 kartlık bir desteden rasgele bir kart çekilsin.

•A olayı"Kart bir maçadır" olsun.

•B olayı ise "kartın siyah renkli" olması olsun.

- B verilmişken A'nın gerçekleşme olasılığını bulunuz.

32

Koşullu Olasılık

Aradığımız olasılık: $P(A/B)$ dir. $P(A)=\frac{1}{4}$ ve $P(A/B)=\frac{1}{2}$ dir.

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},\ \text{oldugundan}$$

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{13/52}{26/52}=\frac{13}{26}=\frac{1}{2}\quad \text{bulunur.}$$

B olayı hakkında ek bilgi verilmeseydi, A olayının olasılığı

$P(A)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$ **olacaktı**

Yani ek bilgi A olayının olasılığını arttırmıştır

Koşullu Olasılık

Örnek: 4.3.2: Bir fabrikada üretilen parçalardan kusursuz 40 tanesi ve kusurlu 10 tanesi bir depoya konuyor. Çekilen yine yerine konulmaksızın rasgele iki parça sırayla seçildiğinde her iki parçanın da kusurlu olma olasılığı nedir?

Koşullu Olasılık

A: İlk seçilen parça kusurludur.
B: İkinci parça kusurludur.

$$P(A)=\frac{10}{50}=\frac{1}{5}\quad \text{ve}\quad P(B/A)=\frac{9}{49}$$

Öte yandan $P(A\cap B)=P(A).P(B/A)$

$$=\frac{1}{5}.\frac{9}{49}=\frac{9}{245}$$

Koşullu Olasılık İçin Çarpma Teoremi

Teorem 4.3.1 : A_1, A_2, …, A_n olayları bir deneyin S örnek uzayında ise

$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=P(A_1).P(A_2/A_1).P(A_3/A_1\cap A_2)\ldots .P(A_n/A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1})\quad \text{dir.}$$

Koşullu Olasılık İçin Çarpma Teoremi

Örnek 4.3.3: 52'lik bir desteden yerine koymaksızın 3 kart çekiliyor. Bu 3 kartın da As olma olasılığı nedir?

A_1 : İlk kart bir As'tır.
A_2 : İkinci kart bir As'tır.
A_3 : Üçüncü kart bir As'tır.

O halde

$$P(A_1)=\frac{4}{52},\quad P(A_2/A_1)=\frac{3}{51}\quad \text{ve}\quad P(A_3/A_1\cap A_2)=\frac{2}{50}\quad \text{dir.}$$

37

Koşullu Olasılık İçin Çarpma Teoremi

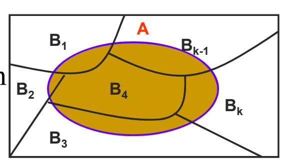
Teorem 4.3.1'e göre $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ olayının olasılığı; ilk çekilişte As bulma olasılığı; ilk çekilişte As bulunduğu verilmişken ikinci çekilişte As bulma olasılığı; birinci ve ikinci çekilişte As bulunduğu verilmişken üçüncü çekilişte As bulunması olasılığının çarpımlarına eşittir.

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1).P(A_2/A_1).P(A_3/A_1\cap A_2)$$
$$=\frac{4}{52}.\frac{3}{51}.\frac{2}{50}$$
$$=\frac{24}{132600}=0{,}000181$$

38

Örnek Uzayın Parçalanışı

Tanım 4.3.2:



$a)\ B_i\cap B_j=\varnothing$ tüm $i\neq j$'ler için

$b)\ \bigcup_{i=1}^{k} B_i = S$

$c)\ P(B_i)>0$ tüm i'ler için

ise $B_1, B_2, \ldots, B_k$ olaylarına S örnek uzayının bir parçalanışı denir.

39

Toplam Olasılık Yasası

Teorem 4.3.3: $B_1, B_2, \ldots, B_k$ olayları bir S örnek uzayının bir parçalanışı ise S'deki herhangi bir A olayı için

$$\boxed{P(A)=\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A/B_i)}\quad \text{dir.}$$

40

Toplam Olasılık Yasası (İspat)

A olayını aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup ... \cup (A \cap B_k)$$

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + ... + P(A \cap B_k)$$

Toplam Olasılık Yasası

$$\boxed{P(A) = P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + ... + P(A/B_k)P(B_k)}$$

41

Örnek

Örnek 4.3.5: Bir depoda 20 kusurlu 80 kusursuz elektrik ampulü bulunsun. Yerine koymaksızın 2 ampul seçelim. İkinci seçilen ampulün kusurlu olması olasılığını bulunuz.

A= {İlk seçilen kusurludur}
A'= {İlk seçilen kusursuzdur}
B= {İkinci seçilen kusurludur}

$$P(B) = P(A).P(B/A) + P(A').P(B/A')$$
$$= \frac{1}{5}.\frac{19}{99} + \frac{4}{5}.\frac{20}{99} = \frac{1}{5}$$

42

Örnek

Örnek 4.3.6: Belli bir alet 3 fabrika tarafından üretilmektedir. 1 no'lu fabrikada hem 2 hem de 3 no'lu fabrikalardaki üretimin 2 katı kadar alet üretildiği bilinmektedir. Yine bilinenlere göre 1 ve 2 no'lu fabrikalardaki üretimin 0,02'si, 3 no'lu fabrikadaki üretimin 0.04'ü kusurludur. Üretilen aletlerin tümü bir depoya konuyor, sonra rasgele bir alet seçiliyor. Bu aletin kusurlu bir alet olması olasılığı nedir?

43

Örnek

A ={Alet kusurludur}
B_1={Alet 1 no'lu fabrikadan alındı}
B_2={Alet 2 no'lu fabrikadan alındı}
B_3={Alet 3 no'lu fabrikadan alındı}

$$P(B_1) = \frac{1}{2}, \qquad P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{4}$$
$$P(A/B_1) = 0.02, \qquad P(A/B_2) = 0.02, \qquad P(A/B_3) = 0.04$$

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + P(B_3)P(A/B_3)$$
$$= 0.025$$

44

Bağımsız Olaylar

Tanım: A ve B olayları bağımsız ise

$$P(B/A) = P(B)$$

Benzer şekilde

$$P(A/B) = P(A)$$

45

İSTATİSTİK I

Ders 8

Bağımsız Olaylar, Bayes Teoremi ve Çözümlü Alıştırmalar

Bağımsız Olaylar

Teorem 4.4.1: A ve B olaylarının bağımsız olması için gerek ve yeter koşul

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A).P(B)} \text{ dir.}$$

İspat:

Bağımsız Olaylar

Teorem 4.4.2: A ve B $(P(A) \neq 0$ ve $P(B) \neq 0)$ bağımsız olaylarsa A ve B kümelerinin en az bir ortak örnek noktası vardır. Yani $A \cap B \neq \varnothing$ dir.

İspat:

Bağımsız Olaylar

Örnek 4.4.1: Bir para iki kez atılsın. İki kez tura gelmesi olasılığı nedir?

A= {İlk atışta tura gelmesi}

B= {İkinci atışta tura gelmesi}

İki olay bağımsız olduğundan

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Burada

$A = \{TY, TT\}$ ve B={YT,TT}, $A \cap B = \{TT\} \neq \varnothing$ dir.

Bağımlı Olaylar

Örnek 4.4.4: Aynı anda iki zar atalım, zarların yüzlerindeki sayılar toplamının 11 (r+b=11) ve aynı anda $r \neq 5$ olması olasılığı nedir?

Örnek uzayda r+b=11 olan örnek noktaları: (5,6) ve (6,5)
Bu iki elemanlı kümeyi E ={(5,6), (6,5)} ile gösterirsek,

$$P(E) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$r \neq 5$ ile tanımlanan küme F olsun. F içinde 30 örnek nokta vardır.

$$P(F) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

Bağımlı Olaylar

E ve F aynı anda gerçekleşecek olaylar olduğundan ve yalnız (6,5) noktası ortak olduğu için $P(E \cap F) = \frac{1}{36}$

Öte yandan $P(E).P(F) = \frac{1}{18}.\frac{5}{6} \neq \frac{1}{36}$ olduğundan
E ve F olayları bağımlı olaylardır.

Sonuç

Üç ya da daha çok olay bağımsız olduklarında, onların aynı anda elde edilmelerinin olasılığı, olasılıklarının çarpımına eşittir. Örneğin E,F ve G bağımsızsa

$P(E \cap F \cap G) = P(E).P(G).P(F)$ eşitliği yazılır.

Bağımsız Olaylar

Teorem 4.4.2: E ve F bir S örnek uzayında bağımsız olaylar olsun. O halde, E ve F' ve E' ve F; E' ve F' bağımsızdırlar.

	F	F'	Satır Toplamı
E	$P(E).P(F)$	$P(E).P(F')$	$P(E)$
E'	$P(E').P(F)$	$P(E').P(F')$	$P(E')$
Sütun Toplamı	$P(F)$	$P(F')$	1

E ve F’nin bağımsız olduğu varsayımından,

$$P(E \cap F) = P(E).P(F)$$

Bağımsız Olaylar

Satır toplamları ve sütun toplamları $P(E)$ $P(E')$ $P(F)$ $P(F')$ olmalıdır.

	F	F′	Satır Toplamı
E	$P(E).P(F)$		$P(E)$
E′			$P(E')$
	$P(F)$	$P(F')$	

Satır toplamı P(E)'den :

$$P(E \cap F') = P(E) - P(E).P(F) = P(E)[1 - P(F)]$$
$$= P(E).P(F')$$

Bu eşitlikten E ve F' bağımsızdır.

Bağımsız Olaylar

Benzer şekilde E' ve F de bağımsızdır ve

$$P(E' \cap F) = P(E').P(F)$$

E' ve F' bağımsızdırlar:

$$P(E' \cap F') = P(E') - P(E').P(F) = P(E')[1 - P(F)]$$
$$= P(E').P(F')$$

Olayların Tam Bağımsızlığı

m olayın tam bağımsız (karşılıklı bağımsız) olabilmeleri için gerek ve yeter koşul bir defada alınan herhangi bir sayıdaki olayın her bir kombinasyonunun bağımsız olmasıdır.

m=3 alındığında E_1, E_2, E_3 'ün tam bağımsızlığı için aşağıdaki denklemler sağlanmalıdır.

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1).P(E_2).P(E_3)$$
$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1).P(E_2)$$
$$P(E_1 \cap E_3) = P(E_1).P(E_3)$$
$$P(E_2 \cap E_3) = P(E_2).P(E_3)$$

Olayların Tam Bağımsızlığı

Üstteki denklemler sağlanırsa, herhangi bir denklemde bir olay ile onun tümleyeni denklemin her iki yanında da yer değiştirebiliriz.

$$P(E_1 \cap E_2' \cap E_3) = P(E_1).P(E_2').P(E_3)$$

Olayların Tam Bağımsızlığı

Örnek 4.4.5: İki para atılsın. E_1={İlk paranın tura gelmesi} olayı, E_2={İkinci paranın tura gelmesi} olayı ve E_3={Her ikisi de tura veya her ikisi de yazı} olayı olsun. E_1 , E_2 ve E_3 olayları tam bağımsız mıdır?

13

Olayların Tam Bağımsızlığı

S ={YT, TY, YY, TT}
E_1={TT, TY}
E_2={YT, TT}
E_3={TT, YY}
$E_1 \cap E_2 \cap E_3$={TT}

$$P(E_1)=\frac{1}{2},\quad P(E_2)=\frac{1}{2},\quad P(E_3)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$P(E_1\cap E_2)=P(E_1\cap E_3)=P(E_2\cap E_3)=\frac{1}{4}$$

14

Olayların Tam Bağımsızlığı

Görüldüğü üzere olaylar çifter çifter bağımsızdır. Ancak

$P(E_1\cap E_2\cap E_3)=\frac{1}{4}\neq P(E_1).P(E_2).P(E_3)$ olduğundan üç olay tam bağımsız değildir.

15

Olayların Tam Bağımsızlığı

Örnek 4.4.7: S={e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6} bir deneyin örnek uzayı olsun. e_i olayları için aşağıdaki olasılıkların varlığını kabul edelim:

$$P_1=\frac{1}{8},\quad P_2=\frac{5}{16},\quad P_3=\frac{1}{16},\quad P_4=\frac{3}{8},\quad P_5=P_6=\frac{1}{16}$$

Burada P_i=P({e_i}), E={e_1, e_4}, F={e_1, e_2, e_5}, G={e_1, e_2, e_3} alalım. E, F, G'nin bağımsız olduklarını fakat tam olarak bağımsız olmadıklarını gösteriniz.

16

Olayların Tam Bağımsızlığı

$$P(E)=P_1+P_4=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$$

$$P(F)=P_1+P_2+P_5=\frac{1}{8}+\frac{5}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$$

$$P(G)=P_1+P_2+P_3=\frac{1}{8}+\frac{5}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$$

$P(E\cap F\cap G)=P_1=\frac{1}{8}=P(E).P(F).P(G)$ olduğundan

E, F ve G bağımsızdır.

17

Olayların Tam Bağımsızlığı

$P(E\cap F)=P_1=\frac{1}{8}\neq P(E).P(F)$ dir.

O halde E ve F bağımlıdır.

Bu nedenle E, F ve G tam olarak bağımsız değildir.

18

Olayların Tam Bağımsızlığı

Örnek 4.4.9: A, S örnek uzayında herhangi bir olay ise A ve S' nin bağımsız olduğunu gösteriniz. A ve ø bağımsız olabilir mi?

a) $P(A).P(S)=P(A).1$ yazılabilir. Öte yandan $A\cap S=A$ olduğundan $P(A\cap S)=P(A).P(S)$ elde edilir.

b) $P(A).P(\varnothing)=P(A).0$ yazılabilir. O halde tanım 4.4.1'e göre A ve $\varnothing$ bağımsızdır.

19

Bayes Teoremi

Örnek 4.5.1: İki kavanozdan birincisinde 4 siyah ve 6 kırmızı top, ikincisinde 3 siyah ve 2 kırmızı top vardır. Rasgele bir kavanoz seçer ve seçilen kavanozdan yine rasgele bir top çekersek;

a) Siyah bir top çekilmiş olma olasılığı nedir?

b) Siyah topun çekildiği bilindiğinde birinci kavanozun seçilmiş olma olasılığı nedir?

20

Bayes Teoremi

A: I. kavanozun seçilmesi
B: II. kavanozun seçilmesi
E: Siyah topun çekilmesi

a) P(Siyah)=P(I. kavanoz ve siyah)+P(II. kavanoz ve siyah)

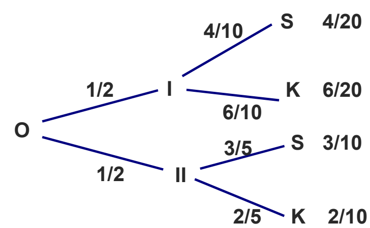
O halde

$$P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E) \qquad \text{veya}$$

$$P(E)=P(A).P(E/A)+P(B).P(E/B) \quad \text{dir.}$$

21

Bayes Teoremi



$$P(E)=\frac{1}{2}.\frac{4}{10}+\frac{1}{2}.\frac{3}{5}=\frac{4}{10}+\frac{3}{5}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$$

22

Bayes Teoremi

b) P(Kavanoz I/Siyah)=P(Kavanoz I ve siyah)/P(Siyah)

$$P(A/E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}$$

$$P(A\cap E)=\frac{4}{20} \quad \text{(Ağaç diyagramını kullanarak)}$$

$$P(E)=\frac{10}{20} \quad \text{(a şıkkından)}$$

$$P(A/E)=\frac{4/20}{10/20}=\frac{4}{10}$$

23

Bayes Teoremi

Örnek 4.5.1'in genelleştirilmiş hali Bayes Teoremi olarak bilinir.

Teorem 4.5.1: B_1, B_2, …, B_k'lar bir S örnek uzayının parçalanışı olsun. A, S içinde $P(A)\neq 0$ olan bir olay ise

$$\boxed{P(B_r/A)=\frac{P(B_r)P(A/B_r)}{\sum_{i=1}^{k}P(B_i)P(A/B_i)}}$$

24

Bayes Teoremi

Örnek 4.5.2: Cıvata üreten bir fabrikada toplam üretimin % 30'u A, % 30'u B, % 40'ı C makineleri tarafından yapılmaktadır. Bu makinelerin, sırasıyla üretimlerinin % 1, %3 ve %2'si kusurlu cıvatalardır. Bir günlük üretim sonunda bir cıvata seçiliyor ve kusurlu olduğu görülüyor. Bu cıvatanın A makinesi, B makinesi, C makinesinde üretilmiş olma olasılığı nedir?

Bayes Teoremi

E: Kusurlu cıvata
A: Cıvata A makinesinde yapıldı
B: Cıvata B makinesinde yapıldı
C: Cıvata C makinesinde yapıldı.

$P(A)=0.30,\quad P(E/A)=0.01,\quad P(B)=0.30,\quad P(E/B)=0.03,$
$P(C)=0.40,\quad P(E/C)=0.02$

$$P(A\cap E)=P(A).P(E/A)=(0.30).(0.01)=0.003$$
$$P(B\cap E)=P(B).P(E/B)=(0.30).(0.03)=0.009$$
$$P(C\cap E)=P(C).P(E/C)=(0.40).(0.02)=0.008$$

Bayes Teoremi

Bayes teoremini kullanarak

$$P(A/E)=\frac{P(A\cap E)}{P(A\cap E)+P(B\cap E)+P(C\cap E)}$$
$$=\frac{0.003}{0.003+0.009+0.008}=\frac{3}{20}$$

Benzer şekilde

$$P(B/E)=\frac{0.009}{0.020}=\frac{9}{20}$$

$$P(C/E)=\frac{0.008}{0.020}=\frac{8}{20}$$

Çözümlü Alıştırmalar

4.6.1: 6 istatistikçi ve 5 biyologdan 7 kişilik bir komisyon seçilecektir.

a) Komisyonda 4 istatistikçi
b) Komisyonda en az 4 istatistikçi
bulunması olasılığı nedir?

Çözümlü Alıştırmalar

4.6.4: Takımların toplam sayısını azaltmak amacıyla, 2n takım iki eşit gruba ayrılıyor. En kuvvetli iki takımın

a)Farklı takımlarda
b)Aynı grupta bulunmaları olasılığı nedir?

Çözümlü Alıştırmalar

4.6.6: 2 kişi bir asansörle zeminden üst katlara çıkacaktır. Asansör 2., 4., 6. katlarda durmaktadır. Bu iki kişinin farklı katlarda inmeleri olasılığını bulunuz.

33

Çözümlü Alıştırmalar

4.6.15: $E_1, E_2, \ldots, E_n$ olayları tam bağımsız olsunlar.

$$P(E_k) = \frac{1}{1+k} \qquad 1 \le k \le n \text{ alalım.}$$

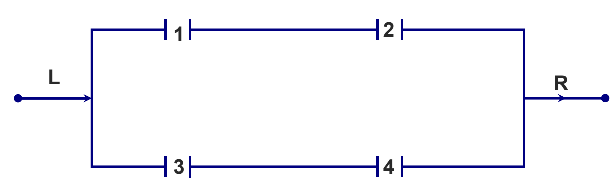
Bu n olayın tümünün gerçekleşme**me**si olasılığı nedir?

34

35

Çözümlü Alıştırmalar

4.6.19: Şekilde L ve R terminalleri arasında 1, 2, 3, 4 ile gösterilen elektrik düğmeleri vardır. Her bir düğmenin kapalı olması olasılığı p olsun. Tüm düğmeler birbirinden bağımsız olarak görev yapıyorsa, L ve R terminalleri arasında elektrik akımı olma olasılığı nedir?



Şekil 4.6.1

36

Çözümlü Alıştırmalar

4.6.44: Elimizdeki topları tablodaki gibi renklere ve birbirinden ayırt edilemeyen kutulara atıyoruz. Rasgele bir kutu seçiliyor ve bu kutudan seçilen bir topun kırmızı olduğu görülüyor. III. Kutunun seçilmiş olma olasılığı nedir?

Tablo 4.6.2

	I. Kutu	II. Kutu	III. Kutu
Kırmızı	2	4	3
Siyah	3	1	4
Mavi	5	3	3

Alıştırmalar

4.7.4: 1, 2, 3,…, 17 sayılarının kümesinden yerine koymaksızın iki sayı seçiliyor. Toplamın 11 olması olasılığı nedir?

Alıştırmalar

4.7.5: TÜRKİYE sözcüğünün harfleri rasgele düzenlendiğinde

a) R ve K'nın birlikte olması,
b) Kelimenin T ile başlaması,
c) Kelimenin E ile bitmesi,
d) T ile başlayıp Y ile bitmesi olasılığı nedir?