MATEMATİK - I

İKTİSAT LİSANS PROGRAMI

PROF. DR. ERGÜN EROĞLU

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ AÇIK VE UZAKTAN EĞİTİM FAKÜLTESİ

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ AÇIK VE UZAKTAN EĞİTİM FAKÜLTESİ
İKTİSAT LİSANS PROGRAMI

MATEMATİK - I

Prof. Dr. Ergün EROĞLU

Yazar Notu

Elinizdeki bu eser, İstanbul Üniversitesi Açık ve Uzaktan Eğitim Fakültesi'nde okutulmak için

hazırlanmış **bir ders notu niteliğindedir**.

ÖNSÖZ

Sevgili öğrenciler;

Sizler için hazırlamış olduğum “Matematik I” adlı kitabımın amacı; matematik düzeylerini belirli bir seviyeye getirmek, matematik kavramlarını yerleştirmek ve bu kavramların iktisat problemlerinin çözümünde, kullanılmalarını sağlamaktır. Kaynak olarak yararlanabileceğiniz bu kitapta iktisat problemlerine ağırlık verilmeye çalışılmış ve örnek problemler ile desteklenmiştir. Matematik bilgilerinin işletme ve iktisat problemlerinin çözümüne ışık tutabilmesi ve rehberlik edebilmesi için hazırlamış olduğum bu kaynağın uzun yıllar sizlere yol göstereceğini ümit etmekteyim. Bu kitabı farklı kılmak ve katkı sağlamak amacıyla bölüm sonlarına çözümlü çalışma soruları ve çoktan seçmeli sorular da eklenmiştir. Kitabımızda 1.Sınıf 1.Dönem Matematik dersinin tüm konuları ele alınmaktadır.

Siz sevgili öğrencilerimizi geleceğe hazırlamak amacıyla sunduğum bu kitabımda gözden kaçan eksiklikler ve farkına varılmamış hatalarım olduysa, bu konuda sizlerden gelecek katkılarla ve her türlü görüşünüz ile sorunların en aza indirilebileceğini ümit etmekteyim. Son olarak siz değerli öğrencilerimiz HOŞGELDİNİZ… Sizleri aramızda görmekten mutluluk duymaktayım. Üniversite hayatınızda başarı merdivenlerini koşarak çıkmanız dileğiyle…

“Matematik I” adlı kitabımın öğrencilerime dersten başarılı olmaları için yardımcı kaynak oluşturması dışında çok daha önemlisi problem çözme ve sayısal düşünme alışkanlıklarını kazandırması yönünde yararlı bir kaynak olmasını dilerim.

Prof. Dr. Ergün EROĞLU
İstanbul Üniversitesi

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR

BBN: Başabaş Noktası
SKN: Sıfır Kâr Noktası
PDN: Pazar Denge Noktası
R: Toplam Gelir
MR: Marjinal Gelir
VC: Toplam Değişken Maliyet
FC: Toplam Sabit Maliyet
TC: Toplam Gelir
MC: Marjinal Maliyet
AC: Ortalama Gelir
q: Üretim (Satış) Miktarı
p: Ürünün Birim Satış Fiyatı
c: Birim Değişken Maliyet
P: Kâr
PS: Üretici Rantı
CS: Tüketici Rantı
Det: Determinant
T: Transpoze
S: Paranın Gelecekteki Değeri
P: Paranın Bugünkü Değeri
i: Yıllık Faiz Oranı
r: Yıllık Faiz Oranı
lim: Limit
log: Logaritma
ln : e Tabanında Logaritma, Doğal Logaritma
k: Sabit Sayı veya Dönem Sayısı

YAZAR NOTU

Sevgili öğrenciler,

Ekonomiyle matematiğin ilişkisi çok eskiye dayanmaktadır. Genel olarak iktisat yani ekonomi incelendiğinde, makro ve mikro ekonomik dengelerin matematikle birlikte kurulduğu görülmektedir. İstatistikle ekonominin kesişimi olan "ekonometri" de oldukça eski bir kavramdır. İstatistiğin alt yapısı da matematiğe dayanmaktadır. İktisatta ortaya çıkan ve bir çıkışsızlık oluşturan sorunlara matematiksel çözüm arayışı ve matematiksel modeller oluşturmak son yıllarda daha fazla önem kazanmaktadır. İşbirliği Yapılabilen ve İşbirliği Yapılamayan Oyun Kuramları, Kaos problemleri, İstatistiksel analiz yöntemleri ekonomiye uyarlanmakta ve bu doğrultuda çeşitli modeller geliştirilmektedir. Son yıllarda Nobel Ekonomi ödülünü en çok alanlar, çalışmalarını bu alanda yoğunlaştırmış bilim insanları olmaktadır.

İktisat eğitiminde başarı sağlayabilmenin temeli matematikte başarıdan geçer. Sayısal tarafınızı daha da güçlendirebilmek sizin elinizde. Size kolay düzeyden zor düzeye doğru gidecek biçimde temelden başlayarak iktisatla ilgili temel matematik bilgilerini bu kitapla paylaşmış bulunmaktayım. Kitabı baştan sona çalışarak ilerlediğiniz ve çözümlü soruları anlayıp, test sorularını da çözdüğünüz takdirde başarı kendiliğinden gelecektir. Hepinize Matematik I dersinde başarılar dilerim.

Prof. Dr. Ergün Eroğlu

MATEMATİKSEL SEMBOLLER

Matematik I ve Matematik II kitaplarında kullanılan matematiksel simgeler ve bu simgelerin açıklamaları aşağıda verilmektedir.

Simge	Simgenin Açıklaması	Simge	Simgenin Açıklaması
$\in$	Elemanıdır	$\cup$	Birleşim
$\notin$	Elemanı değildir	$\cap$	Kesişim
$\subset$	Alt kümesi	$\emptyset$	Boş küme
$\supset$	Üst kümesi	Δ	Delta, Diskriminant
$\subseteq$	Alt küme veya eşit	$\leq$	Küçük veya eşit
$\supseteq$	Üst küme veya eşit	$\geq$	Büyük veya eşit
$\neq$	Eşit değil	$\nless$	Küçük değil
$<$	Küçüktür	$\nleq$	Küçük veya eşit değil
$>$	Büyüktür	$\ngeq$	Büyük veya eşit değil
$\equiv$	Denktir	$\not\equiv$	Denk değil
$\approx$	Hemen hemen eşit	$\cong$	Yaklaşık olarak eşit
$\sim$	Benzer	$\lesseqgtr$	Küçük eşit veya büyük
$\gg$	Çok daha büyük	$\ll$	Çok daha küçük
$=$	Eşit	$\neq$	Eşit değil

1. SAYILAR, ÜSLÜ VE KÖKLÜ SAYILAR

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

1.1. Sayılar
1.2. Sayma Sayıları, Doğal Sayılar
1.3. Tamsayılar
1.4. Rasyonel Sayılar
1.5. Reel Sayılar
1.4. Rasyonel Sayılarda Dört İşlem
1.5. Üslü Sayılar
1.6. Köklü Sayılar

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1) Sayı nedir?
2) Hangi tür sayılar mevcuttur?
3) Rasyonel Sayılarda dört işlem nasıl yapılır?
4) Üslü sayıların ne tür özellikleri vardır?
5) Köklü sayı nasıl gösterilir, ne anlama gelir?

Anahtar Kavramlar

- Rakam
- Sayı
- Doğal Sayı
- Tam Sayı
- Rasyonel Sayı
- İrrasyonel Sayı
- Reel Sayı
- Üslü Sayı
- Köklü Sayı

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	Kazanım	Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği
Sayılar	Sayı kavramını öğrenmek	Okuyarak, fikir yürüterek
Sayı Kümeleri	Sayıların türlerini öğrenmek	Okuyarak, fikir yürüterek
Üslü Sayılar	Üslü sayılarla işlem yapabilmek	Okuyarak, tekrar yaparak, Problem çözerek
Köklü Sayılar	Köklü Sayılarla işlem yapabilmek	Okuyarak, tekrar yaparak, Problem çözerek

Giriş

S**ayı** çokluğu belirtmek için kullanılan soyut birimdir. Rakamların tek başına veya bir çokluk belirtecek şekilde bir araya getirilmesi ile oluşturulan ifadeye **sayı** denir. Sayıları ifade etmeye yarayan sembollere **rakam** denir. Nasıl ki Türkçe'de yazıları (kelimeleri) yazmak için 29 harfe ihtiyaç duyuluyorsa, sayıları yazmak için de rakamlara ihtiyaç duyulur. Günlük yaşamda kullandığımız 10'luk sistemde 10 tane rakam kullanılmaktadır.

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

sembolleri onluk sayma sisteminin rakamlarıdır. Her rakam sayıdır. Fakat her sayı bir rakam olmayabilir. Sayılar içerisinde bir tane ya da birden fazla rakam içerir. Sayma sayıları tek veya çift olarak ikiye ayrılır. Sıfır ne tek ne de çift sayıdır. Bu bölümde sayılar ayrıntılı olarak işlenecektir.

1.1 Sayılar
İlkel toplumlarda sayı düşüncesi gelişmemişti. Bu toplumlarda insanlar örneğin “iki kedi”, “iki keçi” , “iki ağaç”, “iki taş” için farklı farklı deyimler kullanmışlar, eşyadan ayrı soyut olarak “iki” kavramına erişememişlerdi. Uygarlığın ilerlemesi ile insanlar, aynı çokluktaki nesnelerden soyutlama yolu ile sayı kavramına erişmiş ve sayıları işaretlerle göstermişlerdir.
Sayılar, insanların etrafında gördüğü ve devamlı olarak temasta bulunduğu bireyleri, eşyaları, nesneleri saymak gereksiniminden doğmuştur. İlk insanlar kümelerin elemanları aralarında eşleme yaparak sayı fikrinin gelişmesine katkıda bulunmuşlardır. Zamanla bilinen sayılar gereksinimleri karşılayamaz durumda kalınca yeni sayı kümeleri (tam sayılar, rasyonel sayılar vb.) geliştirmişlerdir.

1.2 Sayma Sayıları
Aynı türden nesneleri saymak için *Sayma Sayıları* kullanılır. “Türkiye’de kaç tane il vardır?” sorusuna karşılık verilen "bir, iki, üç ... " sayılarına ***sayma sayıları*** denir. Sayma sayılarının oluşturduğu kümeye **sayma sayıları kümesi** denir. S ile gösterilir. Sayıları yazmaya yarayan sembollere *rakam* denir. Onluk sistemde 0’dan 9’a kadar 10 tane rakam bulunur. Sayma sayıları kümesi aşağıdaki gibidir.

$$S = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 \}$$

1.3 Doğal Sayılar
Kümelerin eleman sayısını gösteren 0, 1, 2, 3 … gibi sayıların her birine ***doğal sayı*** denir. Örneğin, bir boş kümenin eleman sayısı sıfırdır. Dolayısıyla, doğal sayılar sıfırdan başlar, sonsuza kadar devam eder. Doğal sayıların oluşturduğu kümeye **doğal sayılar kümesi** denir ve N ile gösterilir. Kimi kitaplarda doğal sayıların bir ile başladığı da anlatılır. Doğal sayılar yabancı kitaplarda “The Whole Numbers” olarak ifade edilir.

$$N = \{ 0 , 1 , 2 , 3 , \dots \}$$

1.3.1 Doğal Sayıların Özellikleri
Kapalılık özelliği
Her hangi iki veya daha fazla sayıda doğal sayının çarpımı yine bir doğal sayı olduğu için, doğal sayılar kümesinde çarpma işleminin kapalılık özelliği vardır.

$$5 \in N \quad , \quad 4 \in N$$
$$5 . 4 = 20 \quad , \quad 20 \in N$$

Değişme özelliği
Bir çarpma işleminde çarpanların yerleri değiştirilirse çarpım değişmeyeceğinden, doğal sayılar kümesinde çarpma işleminin değişme özelliği vardır.

$$a \in N , \quad b \in N \qquad a . b = b . a$$

Örneğin,

$$5 . 4 = 4 . 5 = 20$$

olur.

Birleşme özelliği

Her hangi üç doğal sayı çarpılırken; ilk ikisinin çarpımı ile üçüncüsünün çarpımı, son ikisinin çarpımı ile ilkinin çarpımına eşit olduğu için, doğal sayılar kümesinde çarpma işleminin birleşme özelliği vardır.

$a\,,b\,,c \in N$ olmak üzere,

$$a\,.(b\,.c\,) = (a\,.b\,)\,.c$$

$3\,,\ 5\,,8 \in N$ olmak üzere,

$$3\,.(5\,.8\,) = (3\,.5\,).\,8$$

olur.

Yutan eleman

Her hangi bir doğal sayı ile sıfırın çarpımı yine sıfır olduğu için doğal sayılar kümesinde çarpma işleminin yutan elemanı 0 *(sıfır)* dır.

$a \in N$ olmak üzere,

$$a\,.0 = 0\,.a = 0$$

dır.

Etkisiz eleman

Bir doğal sayının *1 (bir)* ile çarpımı bu sayının kendisine eşit olduğundan, doğal sayılar kümesinde çarpma işleminin etkisiz elemanı 1 *(bir)* dir.

$a \in N$ olmak üzere,

$$a\,.1 = 1\,.a = 1$$

dir.

Çarpma işleminin toplama ve çıkarma işlemi üzerine dağılma özelliği

Doğal sayılar kümesinde çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.

$a\,,b\,,c \in N$ için,

$$a\,.(b \pm c) = a\,.b \pm a\,.c$$

Örneğin,

$$2\,.(8+5) = 2.8 + 2\,.5 = 26$$
$$2\,.(8-5) = 2.8 - 2\,.5 = 6$$

olur.

1.4 Tamsayılar

$8 \in N$, $3 \in N$ için $8-3=5 \in N$'dir; fakat $3-8=-5 \notin N$' dir. Bu yüzden doğal sayılar kümesi toplama (çıkarma) işlemine göre kapalı değildir. Toplam (çıkarma) işleminde kapalılık özelliği olmadığı için de doğal sayılar birçok problemin çözümünde yetersiz kalmıştır. Problemleri daha kolay çözebilmek amacıyla doğal sayıları da kapsayan, çıkarma işlemine göre kapalı olan ve toplama işlemine göre bir elemanın tersi bulunan daha geniş bir sayı kümesi tanımlanır. Bu küme tam sayılar kümesi olarak adlandırılır ve I (Integers) veya Z ile gösterilir.

$$Z = \{-\infty, \dots, -n \dots, -3\,,-2\,,-1\,,0\,,1\,,2\,,3\,,\dots n\,,n+1, \dots, \infty\}$$

Pozitif Tam Sayılar Kümesi,

$$Z^{+} = \{\,1\,,2\,,3\,,\dots n\,,\dots \infty\}$$

Negatif Tam Sayılar Kümesi,

$$Z^{-} = \{-1\,,-2\,,-3\,,\dots\ ,-n\,,-n-1, \dots, -\infty\}$$

{ 0 } ne negatif ne de pozitif tam sayıdır.

$$Z = \{Z^+\} \cup \{ 0 \} \cup \{Z^-\}$$
$$Z = \{-\infty, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, \infty\}$$
$$I = \{-\infty, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, \infty\}$$

1.4.1 Tamsayıların Doğal Sayılardan Farklı Özellikleri

Ters Eleman Özelliği

Her $a \in Z$ için,

$$a + (-a) = 0 = (-a) + a$$

olduğundan a'nın tam sayılar kümesinde toplama işlemine göre tersi -a'dır ve her elemanın tersi vardır. -3 ün tersi 3 tür.

$$(+3) + (-3) = 0 = (-3) + (+3)$$

1.5 Rasyonel Sayılar

p *ve* $q \in Z$ olmak üzere; bu iki sayının oranı olan $^p/_q$, $(q \neq 0)$ sayısına *rasyonel* veya *kesirli sayı* denir. Rasyonel Sayılar Kümesi $\boldsymbol{Q}$ ile gösterilir. $^p/_q$ ifadesinde $\boldsymbol{p}$' ye kesrin **payı** $\boldsymbol{q}$' ya da kesrin **paydası** denir.

$$r = {}^p/_q = \frac{p}{q} \quad ; \quad (q \neq 0)$$

Örnek:

$$\frac{3}{7} \;,\; \frac{-1}{5} \;,\frac{8}{3}$$

gibi sayılar rasyonel sayıdır.

Ondalıklı sayılar diye tabir edilen 0,6 gibi sayılar da rasyonel sayılardır. 0,6 ondalıklı sayısı rasyonel sayı olarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$0{,}6 = \frac{6}{10}$$

0,15 sayısı rasyonel sayı olarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$0{,}15 = \frac{15}{100}$$

1.5.1 Rasyonel Sayılarda ve Rasyonel İfadelerde Toplama İşlemi

Rasyonel sayılarda toplama işlemi yapılırken toplanacak rasyonel sayıların veya rasyonel ifadelerin paydalarının eşit olup olmadığına bakılır. Paydalar eşit ise paylar toplanır paya yazılır. Paydaya sadece eşit olan payda yazılır. Paydalar eşit olmadığında ilk olarak paydalar eşitlenmelidir. Payda eşitlendikten sonra paylar toplanır paya yazılır, eşitlenmiş payda da paydaya yazılır.

a) Paydaların eşit olduğu durum

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k} = \frac{a+b}{k}$$

Eğer üç rasyonel sayı toplanacak ise;

$$\frac{a}{k}+\frac{b}{k}+\frac{c}{k}=\frac{a+b+c}{k}$$

Örnek:

$$\frac{1}{4}+\frac{5}{4}=\frac{1+5}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

b) Paydaların eşit olmadığı durum

Paydaların eşit olmadığı durumda önce payda eşitlenir, daha sonra paylar toplanıp paya yazılır, eşitlenmiş payda ise paydaya yazılır.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{d}+\frac{c}{d}\cdot\frac{b}{b}=\frac{ad+cb}{bd}$$

Örnekler:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{2}=\frac{3}{6}+\frac{4}{6}=\frac{7}{6}$$

$$\frac{3}{5}+\frac{2}{7}=\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{7}+\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{5}=\frac{21}{35}+\frac{10}{35}=\frac{31}{35}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{4}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3}+\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{2}=\frac{3+8}{6}=\frac{11}{6}$$

1.5.2 Rasyonel Sayılarda veya Rasyonel İfadelerde Çıkarma İşlemi

Rasyonel sayılarda çıkarma işlemi yapılırken toplanacak rasyonel sayıların veya rasyonel ifadelerin paydalarının eşit olup olmadığına bakılır. Paydalar eşit ise paylar çıkarılır paya yazılır. Paydaya sadece eşit olan payda yazılır. Paydalar eşit olmadığında ilk olarak paydalar eşitlenmelidir. Payda eşitlendikten sonra paylar çıkarılır paya yazılır, eşitlenmiş payda da paydaya yazılır.

a) Paydaların eşit olduğu durum

$$\frac{a}{k}-\frac{b}{k}=\frac{a-b}{k}$$

Örnek:

$$\frac{1}{4}-\frac{5}{4}=\frac{1-5}{4}=\frac{-4}{4}=-1$$

b) Paydaların eşit olmadığı durum

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{d}-\frac{c}{d}\cdot\frac{b}{b}=\frac{ad-cb}{bd}$$

Örnekler:

$$\frac{5}{2}-\frac{4}{3}=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{3}-\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{2}=\frac{15}{6}-\frac{8}{6}=\frac{7}{6}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{4}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3}-\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{2}=\frac{3-8}{6}=\frac{-5}{6}$$

Rasyonel sayıya benzer olarak rasyonel olarak verilmiş olan ifadelerin toplanması veya çıkarılmasında da aynı adımlar uygulanır.

Örnek:

$$\frac{3}{x}+\frac{x}{5}=\frac{3}{x}\cdot\frac{5}{5}+\frac{x}{5}\cdot\frac{x}{x}=\frac{15}{5x}+\frac{x^2}{5x}=\frac{15+x^2}{5x}$$

Örnek:

$$\frac{x}{x+2}-\frac{3}{x+1}=\frac{x}{x+2}\cdot\frac{(x+1)}{(x+1)}-\frac{3}{x+1}\cdot\frac{(x+2)}{(x+2)}$$
$$=\frac{x^2+x}{(x+2)(x+1)}-\frac{3x+6}{(x+1)(x+2)}$$
$$=\frac{(x^2+x)-(3x+6)}{(x+2)(x+1)}=\frac{x^2-2x-6}{(x+2)(x+1)}$$

Örnek:

$$\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x+2}=\frac{5(x+2)}{(x-2)(x+2)}-\frac{3(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$
$$=\frac{5x+10-3x+6}{(x-2)(x+2)}$$
$$=\frac{2x+16}{(x-2)(x+2)}$$

1.5.3 Rasyonel Sayılarda veya Rasyonel İfadelerde Çarpma İşlemi

Rasyonel olarak verilmiş olan iki sayıyı çarparken paylar çarpılıp paya yazılır, paydalar çarpılıp paydaya yazılır. Bu arada pay ve paydadaki değerlerde sadeleşme söz konusu ise rasyonel sayılar sadeleştirilerek işlem kolaylaştırılır ve hızlandırılır.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Örnek:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}=\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

Örneğin yukarıdaki iki rasyonel sayının çarpımı yapılırken daha paylar ve paydalar hiç çarpılmadan pay kısmındaki 4 ile payda kısmındaki 2 sadeleştirilir.

Örnek:

$$\left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{4}{15}\right)=\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{15}=\frac{5}{15}\cdot\frac{4}{8}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

Örnek:

$$\frac{x+1}{x+2}\cdot\frac{3x}{x-4}=\frac{(x+1)\cdot 3x}{(x+2)(x-4)}$$

1.5.4 Rasyonel Sayılarda ve Rasyonel İfadelerde Bölme İşlemi

Rasyonel olarak verilmiş olan iki sayıyı çarparken ilk olarak yapılacak iş birinci rasyonel sayı değişmeden yazılır, ikincisi ise tersi alınarak yazılır ve daha sonra çarpma işlemi uygulanır. Tekrar söylemek gerekirse, birinci aynı yazılır, ikincisi ters çevrilir çarpılır. Paylar çarpılıp paya yazılır, paydalar çarpılıp paydaya yazılır. Bu arada pay ve paydadaki değerlerde sadeleşme söz konusu ise rasyonel sayılar sadeleştirilerek işlem kolaylaştırılır ve hızlandırılır.

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{ad}{bc}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{d}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Örnek:

$$\frac{1}{3} : \frac{4}{5} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{12}$$

Örnek:

$$\left(\frac{5}{8}\right) : \left(\frac{15}{4}\right) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{15} = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Örnek:

$$\frac{2w}{4w(w+6)} \div \frac{6w(w-1)}{9w^2(w+6)} = \frac{2w}{4w(w+6)} \cdot \frac{9w^2(w+6)}{6w(w-1)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3w}{2(w-1)} = \frac{3w}{4(w-1)}$$

Daha sonra denklemler kısmında da bahsi geçecek olan rasyonel denklem çözümünde de rasyonel sayılarda toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri nasıl yapılıyorsa aynı adımlar denklem çözmede de uygulanır.

Örnek:

$$\frac{2}{z^2-4} + \frac{10}{6z+12} = \frac{1}{z-2}$$

$$\frac{2}{(z-2)(z+2)} + \frac{10}{6(z+2)} = \frac{1}{z-2}$$

$$(z-2)(z+2)(6)\left[\frac{2}{(z-2)(z+2)} + \frac{10}{6(z+2)}\right] = (z-2)(z+2)(6)\left[\frac{1}{z-2}\right]$$

$$(6)(2) + (z-2)(10) = (z+2)(6)$$

$$12 + 10z - 20 = 6z + 12$$

$$4z = 20$$

$$z = 5$$

Sağlama (Yerine koyma) işlemi:

$$\frac{2}{5^2-4} + \frac{10}{6(5)+12} = \frac{1}{5-2}$$

$$\frac{2}{21} + \frac{10}{42} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{21} + \frac{5}{21} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{7}{21} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Örnek:

$$\frac{3x}{x+2} - \frac{5}{x-3} = \frac{-25}{x^2-x-6}$$

$$\frac{18}{x^2-3x}=\frac{6}{x-3}-\frac{5}{x}$$

Toplama Örneği

$$\frac{x+1}{x-2}+\frac{x-1}{x^2-4}=\frac{x^2+3x+2+x-1}{x^2-4}=\frac{x^2+4x+1}{x^2-4}$$

Çıkarma Örneği

$$\frac{x+1}{x-2}-\frac{x-1}{x^2-4}=\frac{x^2+3x+2-x+1}{x^2-4}=\frac{x^2+2x+3}{x^2-4}$$

Çarpma Örneği

$$\frac{x+1}{x-3}\cdot\frac{x-1}{x^2-4}=\frac{x^2-1}{(x-3)(x^2-4)}$$

Bölme Örneği

$$\frac{x+1}{x-2}\div\frac{x-1}{x^2-4}=\frac{x+1}{x-2}\cdot\frac{x^2-4}{x-1}$$

$$\frac{x+1}{\boldsymbol{x-2}}\cdot\frac{(\mathbf{x-2})(\mathrm{x}+2)}{x-1}=\frac{(\mathrm{x}+1)\cdot(\mathrm{x}+2)}{x-1}=\frac{x^2+3x+2}{x-1}$$

Örnek:

$$\frac{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}=?$$

$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ olduğundan,

$$\frac{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}=\frac{\frac{x-y}{xy}}{\frac{x^2-y^2}{xy}}=\frac{x-y}{xy}\cdot\frac{xy}{x^2-y^2}$$

Sadeleştirme yapılır,

$$=\frac{x-y}{xy}\cdot\frac{xy}{(x-y)(x+y)}=\frac{1}{x+y}$$

Örnek:

$$\frac{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}}$$

$$\frac{\frac{x-x+1}{(x-1)x}}{\frac{x+x-1}{(x-1)x}}=\frac{x-x+1}{(x-1)x}\cdot\frac{(x-1)x}{x+x-1}$$

$$=\frac{1}{(x-1)\cdot x}\cdot\frac{(x-1)\cdot x}{2x-1}=\frac{1}{2x-1}$$

Örnek:

$$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}=\frac{2}{x^2-1}$$

$x^2-1=(x+1)(x-1)$ olduğundan, birinci terim $(x-1)$ ile, ikinci terim (x+1) ile genişletilirek paydalar eşitlenir.

$$\frac{A}{x+1}\cdot\frac{(x-1)}{(x-1)}+\frac{B}{x-1}\cdot\frac{(x+1)}{(x+1)}=\frac{2}{x^2-1}$$

$$\frac{A(x-1)+B(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{2}{(x+1)(x-1)}$$

böylece paydalar eşitlendiğine göre, eşitliğin sağlanması için payların da eşit olması gerekir ilkesinden,

$$A(x-1)+B(x+1)=2$$

$$x=1, \quad A=-1$$

$$x=-1, \quad B=1$$

$$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}=-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$$

Örnek:

$$\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x+2}=\frac{x-1}{(x^2+1)(x+2)}$$

$$\frac{Ax+B}{x^2+1}\cdot\frac{(x+2)}{(x+2)}+\frac{C}{x+2}\cdot\frac{(x^2+1)}{(x^2+1)}=\frac{x-1}{(x^2+1)(x+2)}$$

böylece paydalar eşitlendiğine göre, eşitliğin sağlanması için payların da eşit olması gerekir ilkesinden,

$$(Ax+B)(x+2)+C(x^2+1)=x-1$$

$$Ax^2+2Ax+Bx+2B+Cx^2+C=x-1$$

böylece,

$$(A+C).x^2+(2A+B)x+2B+C=0.x^2+1.x-1$$

Sağ tarafta x^2'li terim olmadığından sıfır katsayısı ile çarpılarak yazılır. x^2'li terimin katsayıları eşitlenir. x'li terimin katsayıları eşitlenir ve son olarak sabit terimlerin toplamı eşitlenir. Bu şekilde A, B, C sayıları elde edilmiş olur.

$$A+C=0$$

$$2A+B=1$$

ve

$$2B+C=-1$$

$$\boldsymbol{A=\frac{3}{5},\ \ B=-\frac{1}{5},\ C=-\frac{3}{5}}$$

$$\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x+2}=\frac{\frac{3}{5}x-\frac{1}{5}}{x^2+1}+\frac{-\frac{3}{5}}{x+2}=\frac{x-1}{(x^2+1)(x+2)}$$

1.6 İrrasyonel Sayılar

Oransız sayılar (ya da İrrasyonel sayılar), rasyonel sayılar kümesinin içermediği reel sayılardır. Kesir olarak ifade edilemeyen bu sayılara

$$\pi=3.14159\ldots$$

$$e=2.71828\ldots$$

$$\sqrt{2}=1{,}41421\ldots$$

$$\sqrt{3}=1{,}723205\ldots$$

$$\sqrt{5}=2{,}236068\ldots$$

$$\sqrt{7}=2{,}64575\ldots$$

$$\sqrt{11} = 3{,}31662479 \ldots$$

örnek olarak verilebilir. İrrasyonel sayılar Q' ile gösterilir. Bu sayılar belli bir düzeni olmaksızın sonsuza kadar devam eden ondalık sayılar (örneğin *pi* sayısı) veya rasyonel karşılığı olmayan köklü sayılar olabilir.

1.7 Reel (Gerçel) Sayılar

Rasyonel Sayılar Kümesi İle İrrasyonel Sayılar Kümesinin birleşimi ile Reel (Gerçel) ***Sayılar kümesi*** oluşur. R ile gösterilir. Sayı ekseni üzerindeki rasyonel ve irrasyonel sayıların hepsi reel sayı olarak gösterilir.

Reel (Gerçel) Sayılar Kümesi = { $Q \; U \; Q'$ } olarak gösterilir.

$$R \supset Q \supset Z \supset N$$

1.7.1 Reel Sayılarda Sıralama

Herhangi bir reel sayının ya pozitif ya negatif ya da sıfır olduğunu biliyoruz. İki reel sayı, x ve y verildiğinde, eğer $(y - x)$ pozitif ise,
x sayısı y'den küçüktür denir ve $x < y$ yazılır.
$x, y, z \in R$ için $x < y$ ve $y < z$ ise, $x < z$'dir.
$x < y$, $x = y$ ve $y < x$ ten bir ve yalnız biri geçerlidir.
$x < y$ ise, $x + z < y + z$'dir.
$x < y$ ve $0 < z$ ise, $x \,.\, z < y \,.\, z$'dir.
$x < y$ ve $0 > z$ ise, $x \,.\, z > y \,.\, z$'dir.

1.7.2 Sayılarda ve Matematiksel İfadelerde İşlem Sırası

Bir problemin çözümünde işlem yaparken izlenmesi gereken sıra aşağıdaki gibidir.

1) Parantez İçi işlemleri
2) Kuvvet Alma
3) Bölme ya da çarpma
4) Toplama ya da çıkarma

Örnek:

$$(15 : 3 - 6).(-10\,.\,2 + 15) - 3^2 = ?$$

Çözüm:

$$= (5 - 6)\,.\,(-20 + 15) - 9$$
$$= (-1).(-5) - 9$$
$$= 5 - 9$$
$$= -4$$

Örnek:

$$18 : 6 - [\,2\,.\,(5 - 2) + 12 : 4\,] + 1 = ?$$
$$- [\,2\,.\,3 + 3\,] + 1 = 3 - (9) + 1 = -5$$

1.8 Karmaşık (Kompleks) Sayılar

Reel sayılar dışında reel olmayan sayılar da bulunmaktadır. Bunlara karmaşık sayılar denir. **Karmaşık (kompleks) Sayılar Kümesi** (**C**) ile gösterilir. İktisat konularında karmaşık sayıların kullanım alanı çok fazla olmadığından, karmaşık sayılar ve karmaşık sayı işlemleri üzerinde bu bölümde fazlaca durulmamıştır.

1.9 Üslü Sayılar

Geleneksel olarak, **sayı** bir çokluğu belirtmek için kullanılan soyut birimdir. Rakamların özellikler mevcuttur. Aşağıdaki tabloda 1'den 10'a kadar olan sayıların kareleri (ikinci kuvvetleri) ve küpleri (üçüncü kuvvetleri) verilmiştir.

Sayı (a)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Karesi (a^2)	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Küpü (a^3)	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

1.9.1 Üslü Sayı Kuralları

Aşağıda üslü sayılarla ilgili sık kullanılan matematiksel kurallar verilmektedir. Bu kuralların iyi öğrenilmesi tüm ders konularını anlamada faydalı olacaktır.

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

3) $(a^m)^n = a^{mn}$

4) $(a.b)^m = a^m.b^m$

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, \qquad b \neq 0$

6) $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$
$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

7) $a^0 = 1$

8) $a.a.a.a.a = a^5$
$a.a.a.a.a.a.a.a = a^8$

9) $a + a + a + a + a = 5a$

10) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Örnek:

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

Örnek:

$$0{,}3^{-4}$$

$$\left(\frac{3}{10}\right)^{-4}=\left(\frac{10}{3}\right)^{4}=\frac{10000}{81}$$

Örnek:

$$8^{-\frac{2}{3}}=\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}}=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\right]^{2/3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3\cdot\frac{2}{3}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{1}{4}$$

Örnek:

$$\left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{3}{2}}=\left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}}\right)^{3}=\left(\frac{4}{3}\right)^{3}=\frac{64}{27}$$

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3}=\left(-\frac{4}{3}\right)^{3}=-\frac{64}{27}$$

Örnek:

$$\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^{-4}\right]^{2}\cdot\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^{2}\right]^{3}=\left(-\frac{3}{2}\right)^{-4.2}.\left(-\frac{3}{2}\right)^{2.3}$$

$$=\left(-\frac{3}{2}\right)^{-8}.\left(-\frac{3}{2}\right)^{6}$$

$$=\left(-\frac{3}{2}\right)^{-8+6}=\left(-\frac{3}{2}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(-\frac{3}{2}\right)^{2}}=\frac{1}{\frac{9}{4}}=\frac{4}{9}$$

Örnek:

$$x^2\cdot x^3=x^5$$

Örnek:

$$\frac{x^7}{x^5}=x^2$$

Örnek:

$$x^{-3}=\frac{1}{x^3}$$

Örnek:

$$(2xy)^3=8x^3y^3$$

Örnek:

$$\left(\frac{3y}{2}\right)^{2}=\frac{9y^2}{4}$$

1.10 Köklü Sayılar

Kök ifadesi içeren sayılar da aslında üslü sayılardır. Sayıların üsleri rasyonel ise köklü sayı görümüne de girebilirler. Kesirli sayı üsleri (kuvvetleri) olan sayılara genel olarak köklü sayılar denir. Kökün derecesi 2 ise “karekök”, kökün derecesi 3 ise “küp kök”, kökün derecesi 4 ise “4. dereceden kök”, kökün derecesi n ise “n. dereceden kök”, biçiminde okunur. Kareköklü ifadelerde genellikle kökün derecesi yazılmaz.

$\sqrt{9}$ → Karekök 9 biçiminde veya

$\sqrt{9}$ → Kök 9 biçiminde okunur.

$\sqrt[3]{8}$ → Küpkök 8 biçiminde okunur.

$\sqrt[4]{12}$ → Dördüncü dereceden kök 12 biçiminde okunur.

Köklü sayılar genel olarak aşağıdaki şekilde gösterilir. Bu sayı, “n.dereceden kök a üzeri m” veya “a üzeri m bölü n” olarak okunur.

$$\left.\begin{array}{l} n\ \textbf{; Kökün derecesi} \\ m\ \textbf{; Sayının kuvveti} \end{array}\right\} \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Örnekler:

$$\sqrt[2]{4} = \sqrt[2]{2^2} = 2^{\frac{2}{2}} = 2^1 = 2$$
$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$$
$$\sqrt[2]{25} = 5^{2/2} = 5^1 = 5$$
$$\sqrt[3]{64} = 4^{3/3} = 4^1 = 4$$
$$\sqrt[5]{2^4} = 2^{4/5}$$

Örnekler:

- $\sqrt[2]{8^3} = 8^{3/2}$
- $\sqrt{128} = \sqrt{64 \times 2} = \sqrt{64} \times \sqrt{2} = 8\sqrt{2}$
- $\sqrt{242} = \sqrt{121 \times 2} = \sqrt{121} \times \sqrt{2} = 11\sqrt{2}$
- $\sqrt{96} = \sqrt{16 \times 6} = \sqrt{16} \times \sqrt{6} = 4\sqrt{6}$
- $\sqrt{52} = \sqrt{4 \times 13} = \sqrt{4} \times \sqrt{13} = 2\sqrt{13}$
- $\sqrt{49} = 7$
- $-\sqrt{81} = -9$
- $-\sqrt[4]{16} = -2$
- $\sqrt[4]{81} = 3$
- $\sqrt[3]{64} = 4$

Örnekler:

- $-\sqrt{64 - 8 \cdot -3} = -\sqrt{64 - (-24)}$
  $= -\sqrt{64 + 24} = -\sqrt{88}$
- $\sqrt[3]{127 - 2} = \sqrt[3]{125} = 5$
- $\sqrt{(-6)^2} = |-6| = 6$
- $\sqrt[3]{(-7)^3} = -7$
- $-\sqrt{(-5)^2} = -|-5| = -5$
- $\sqrt{4 \times 4 \times 3} = \sqrt{48}$

Örnek:

$$\left(\frac{49}{100}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{100}} = \frac{7}{10}$$

Köklü sayılarla ilgili kural:

$$\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{a} = 2\sqrt[n]{a}$$

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{a.b}$$

Örnek:

$$64^{\frac{1}{2}}=\sqrt[2]{64}=\sqrt{64}=8$$

$$27^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3^{\frac{3}{3}}=3$$

$$-(25)^{1/2}=-[(5)^2]^{\frac{1}{2}}=-(5)^{2.\frac{1}{2}}=-(5)^1=-5$$

$$\sqrt{\sqrt{x^{12}}}=[(x^{12})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{12.1.1}{4}}=x^3$$

$$\sqrt[5]{\mathrm{b}^3}=\mathrm{b}^{\frac{3}{5}}$$

$$\sqrt[3]{27d^5}=(27d^5)^{\frac{1}{3}}=27^{\frac{1}{3}}d^{\frac{5}{3}}=3d^{\frac{5}{3}}$$

$$\sqrt{c^5}=c^{\frac{5}{2}}$$

$$\sqrt{18}=\sqrt{3^2\cdot 2}=\sqrt{3^2}.\sqrt{2}=3.\sqrt{2}=3\sqrt{2}$$

$$\sqrt[3]{125}=\sqrt[3]{5.5.5}=\sqrt[3]{5^3}=5^{\frac{3}{3}}=5$$

$$\sqrt{450}=\sqrt{225\cdot 2}=\sqrt{15^2}.\sqrt{2}=15.\sqrt{2}=15\sqrt{2}$$

Uygulama

$\sqrt{16}$ = 4

$\sqrt{27}$ = $3\sqrt{3}$

$\sqrt{\frac{16}{81}}$ = $\frac{4}{9}$

$\sqrt{0.64}$ = 0,8

$\sqrt[3]{16}$ = $2\sqrt[3]{2}$

$\sqrt[3]{27}$ = 3

$\sqrt[3]{0.64}$ = 0,4

$\sqrt[3]{-0.64}$ = -0,4

$\sqrt[4]{16}$ = 2

$\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$ = $\frac{2}{3}$

Uygulama Soruları

1) Aşağıdakilerden hangisi bir irrasyonel sayı <u>değildir</u>?

a) $\sqrt{2}$
b) $\sqrt{3}$
c) $\sqrt{4}$
d) e
e) π

2) Aşağıdakilerden hangisi rasyonel sayı <u>değildir</u>?

a) $\sqrt{4}$
b) 4
c) $2/5$
d) $\sqrt{3}$
e) $-1/7$

3) a. $\sqrt[5]{32} = 2$ b. $\sqrt[4]{16} = 2$ c. $\sqrt[2]{(-2)^2} = -2$

d. $\sqrt[5]{243} = 3$ e. $\sqrt[3]{-8} = -2$ f. $\sqrt[4]{-81} =$ Mevcut değil

g. $\sqrt{144} = 12$ h. $\sqrt[3]{-27} = -3$ i. $\sqrt[4]{256} = 4$

Cevaplar
1) C, 2) D

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde matematiğin temel konusu olan sayılar konusu ele alınmıştır. Sayma sayıları, doğal sayılar, tamsayılar, rasyonel sayılar ve irrasyonel sayıların tanımları yapılmıştır. Sayı kümelerinin dışında bu bölümde; sayılarda işlem sırası, üslü sayılar, köklü sayılar, mutlak değer kavramı ve kartezyen koordinat sistemi ayrıntılı olarak işlenmiştir.

Bölüm Soruları

1) Aşağıdakilerden hangisi bir irrasyonel sayı değildir?

a) $\sqrt{25}$
b) $\sqrt{20}$
c) $\sqrt{15}$
d) e
e) π

2) Aşağıdakilerden hangisi rasyonel sayı değildir?

a) $\sqrt{16}$
b) $\sqrt{3}$
c) $^{2}/_{5}$
d) -4
e) $-^{1}/_{7}$

3) 8 in -3. kuvveti kaçtır?

$$8^{-3} = ?$$

a) -8
b) -64
c) $-\frac{1}{512}$
d) $\frac{1}{512}$
e) 8

4) Aşağıda verilen işlemin sonucu kaçtır?

$$-(25)^{\frac{3}{2}} = ?$$

a) -5
b) -25
c) -125
d) 25
e) 125

5) $x \in Z$ ve $|x+3| \leq 4$ olmak üzere; x kaç farklı değer alabilir?

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

6) Aşağıda verilen eşitsizlik göre, x aşağıdakilerden hangisi olabilir?

$$\frac{7}{9} < x < \frac{8}{9}$$

a) $\frac{14}{18}$
b) $\frac{22}{27}$
c) $\frac{24}{27}$
d) $\frac{16}{18}$
e) $\frac{13}{18}$

7) Aşağıda verilen işlemin sonucu kaçtır?

$$\sqrt{80} - \sqrt{45}$$

a) $\sqrt{35}$
b) $\sqrt{5}$
c) $2\sqrt{5}$
d) $3\sqrt{5}$
e) $4\sqrt{5}$

8) Aşağıda verilen işlemin sonucu kaçtır?

$$\frac{\sqrt{48} - \sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \ ?$$

a) $\sqrt{3}$
b) 1
c) 0
d) -1
e) $-\sqrt{3}$

9) Aşağıda verilen işlemin sonucu kaçtır?

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = \ ?$$

a) $3/5$
b) 1
c) $6/8$
d) $5/8$
e) $8/5$

10) Aşağıda verilen işlemin sonucu kaçtır?

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\ ?$$

a) $-2\sqrt{2}$
b) $-\sqrt{2}$
c) 1
d) $\sqrt{2}$
e) $2\sqrt{2}$

Cevaplar

1) a , 2) b , 3) d , 4) c , 5) e , 6) b , 7) b , 8) d , 9) e , 10) a

2. KÜME KAVRAMI VE KÜME İŞLEMLERİ

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

2.1. Küme Kavramı
2.2. Küme Gösterimi
2.3. Küme Tanımları
2.4. Küme İşlemleri
2.5. Küme Özellikleri

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1) Küme nedir?
2) Kümeler nasıl gösterilir?
3) Kümelerle ne tür işlemler yapılır?
4) Sayı kümeleri hangileridir?
5) Bütün sayılar bir kümede toplanabilir mi?

Anahtar Kavramlar

- Küme
- Birleşim Kümesi
- Kesişim Kümesi
- Fark Kümesi
- Evrensel Küme
- Tümleyen
- Alt Küme
- Kapsayan Küme

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	**Kazanım**	**Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği**
Küme Tanımı	Küme tanımını kavrama	Okuyarak, fikir yürüterek
Küme Gösterimi	Kümelerin uygun biçimde nasıl gösterileceğini öğrenme	Okuyarak, fikir yürüterek
Küme İşlemleri	Kümelerle ilgili işlemleri öğrenme, anlayıp çözebilme	Okuyarak, fikir yürüterek problem çözerek
Küme Gösterimi	Küme Gösterimini anlama ve öğrenme	Okuyarak, deneme yaparak, fikir yürüterek

Giriş

Modern matematiğin temeli olan **küme kavramı,** matematikçilerin uzun süre üzerinde anlaşamadıkları, birlik sağlayamadıkları konulardan biri olmuştur. Başlangıçta, "set" kelimesinin tercümesi olarak bu kavramı bize **cümle** veya **küme** olarak tanıtmaya çalışmışlardır. İngilizce anlamına baktığımızda şu anlaşılmaktadır: "**set yani küme**" öyle bir topluluktur ki bu topluluğa neyin dâhil olduğunu, neyin dâhil olmadığını kesinlikle bilebiliriz. Buna karşın bazı topluluklar vardır ki içinde nelerin olup nelerin olamayacağı açık ve kesin değildir. İngilizce de bu tür topluluklar **"group"** veya **"collection"** olarak ifade edilmektedir.

Kümeler uzun yıllardır kullanılıyor olmasına rağmen kümenin matematiksel tanımının yapılması 19. yüzyılda olmuştur. Cantor'a göre matematik problemlerinde genellikle sayılar, noktalar ya da bağıntılar, fonksiyonlar gibi kavramlarla çalışıldığından aslında matematiğin uğraşısı olan tek nesne vardır, o da kümedir. Daha açıkçası; sayıların kümesi, noktaların kümesi, fonksiyonların kümesi gibi kümeler dışında matematiğin hiçbir nesneye ihtiyacı yoktur. Esas olan kümeler arasındaki bağıntıların araştırılmasıdır.
Matematiğin en temel konularının başında gelen küme kavramı, günümüzde birçok matematiksel problemin anlatımını kolaylaştırmada önemli rol oynamakta ve yine matematiğin önemli konularından biri olan bağıntı (fonksiyon) kavramının temelini oluşturmaktadır.

Kümeleri, sınırları kesin olarak belirtilmiş, nesneler topluluğu olarak kabul edebiliriz. Kümeyi meydana getiren nesnelerin, herkes tarafından aynı şekilde, açık seçik anlaşılması ve belli bir anlamı olması gerekir.

2.1. Küme Tanımı

Eşya, canlı ve cansız varlıkların her birine nesne denir. Aynı cinsten nesneler topluluğuna küme (veya cümle) denir. Küme deyince nesnelerden oluşan topluluk akla gelmelidir. Kümeye iyi tanımlanmış nesneler topluluğu da diyebiliriz. Örneğin; bir sınıftaki öğrencilerin kümesi, Türk alfabesinde bulunan sesli harflerin kümesi, bir işletmede çalışan işçilerin kümesi, İktisat Fakültesi 1. sınıf öğrencileri gibi tanımlar küme tanımına uyarlar.

Kümeyi oluşturan nesnelerin her birine kümenin elemanı denir. Örneğin, 3'ün pozitif tamsayılı kuvvetlerinden oluşan kümenin elemanları 3, 9, 27, 81, 243, … sayılarıdır. Kümeleri küme parantezi { } ile gösterilir.

$$A = \{3, 9, 27, 81, 243, \dots\}$$
$$B = \{\text{Kedi , Köpek, Kuş}\}$$
$$C = \{\text{İstanbul, Ankara, İzmir, Bursa, Adana}\}$$

Bir kümenin belirtilebilmesi için kümeyi oluşturan nesnelerin herkes tarafından aynı şekilde anlaşılması gerekir. "Sınıfımızdaki gözlüklü öğrenciler", "haftanın günleri" gibi tanımlar birer küme belirtirken, "Türkiye'nin bazı illeri", "yılın soğuk geçen ayları" tanımları bir kümeyi net olarak belirtmez.

Örneğin; "5 il adı yazın" denildiğinde yazılabilecek küme, yazacak kişiye bağlı olarak değişecektir. Topluluğun elemanları net bir şekilde belirlenemediği için bir küme oluşmaz.

Kümeleri alışıldığı üzere $A, B, C, \dots, X, Y, Z$ gibi büyük harflerle ve kümenin elemanları ise $a, b, c, \dots, x, y, z$ gibi küçük harflerle gösterilir. Bir x elemanı A kümesinin elemanı ise bu $x \in A$ biçiminde yazılır ve "x elemanıdır A" diye okunur. Eğer bir x elemanı A kümesinin elemanı değilse, bu $x \notin A$ biçiminde yazılır ve "x elemanı değildir A" diye okunur.

$$C = \{1,2,3,4\}$$
$$1 \in C \,, 2 \in C$$
$$5 \notin C, \quad 8 \notin C$$

Örneğin, Türkçede bulunan sesli harfler bir küme oluşturur.

$$\text{Sesli harfler} = \text{SH} = \{a, e, ı, i, o, \text{ö}, u, \text{ü}\}$$
$$e \in SH \qquad k \notin SH$$

2.2 Küme Gösterimi

Kümeler üç farklı şekilde gösterilir:

2.2.1 Listeleme Yöntemi ile Gösterim

Kümenin elemanlarının { } sembolü (küme parantezi) içine, aralarında virgül olacak şekilde yazılmasıdır. Kümenin liste şeklindeki yazılışında, elemanların yazılış sırası önemli değildir. Kümedeki her eleman bir defa yazılır.

Örnek:

Türkçe Alfabesindeki sesli harflerden oluşan A kümesini liste yöntemi ile gösteriniz.

$$A = \{a, e, ı, i, o, \text{ö} , u, \text{ü}\}$$

şeklinde yazılır.

Örnek:

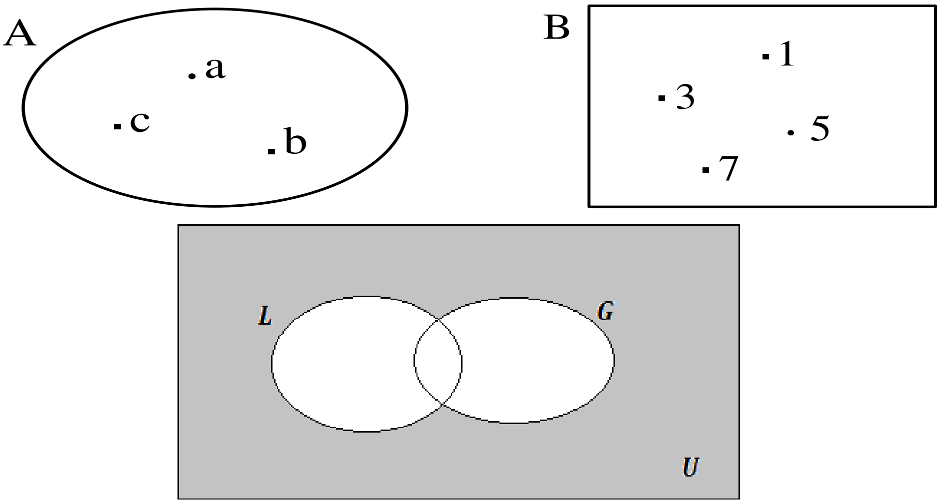
$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, 6 elemanlı bir A kümesi

$B = \{a, b, c, d\}$, 4 elemanlı bir B kümesi

$C = \{*, 0, \Delta\}$, 3 elemanlı bir C kümesi

2.2.2 Venn Şeması ile Gösterim

Venn Şeması ile gösterimde, kümenin elemanları bir daire, elips veya bir dikdörtgen biçiminde kapalı bir geometrik sınır içine yazılarak gösterilir. Her bir elemanın yanında bir nokta bulunur.



Şekil 2.1: Venn Şeması ile Küme Gösterimi

2.2.3 Özellik Belirterek Küme Gösterimi

Kümenin elemanları arasında bulunan ortak bir özellik varsa bu özellik belirtilerek kümenin gösterimine ortak özellik yöntemi ile küme gösterimi denir.

$$A = \{x \mid x'\text{in bir özelliği}\}$$

$A = \{x \mid \ldots\}$ veya $A = \{x: \ldots.\}$ biçiminde yazılır.

Kümenin elemanlarını, daha somut ya da daha kolay algılanır biçimde gerektiğinde sözel, gerektiğinde matematiksel bir ifade olarak ortaya koyma biçimidir.

$A = \{x : (x'\text{in bir özelliği})\}$

Burada " x : " ifadesi "öyle x'lerden oluşur ki" diye okunur.

Bu ifade " $x \mid$ " biçiminde de yazılabilir.

2.3 Kümelerin Karşılaştırılması

2.3.1 Küme Özellikleri

- Bir kümenin elemanlarının küme içinde yer değiştirmesi kümeyi değiştirmez.

$$A = \{a, b, c, d\} = \{d, c, a, b\} = \{d, b, c, a\} \ldots$$

- Kümede her eleman bir kez yazılır.

$A = \{a, a, b, 1, 2, 1, 3\} = \{a, b, 1, 2, 3\}$

2.3.2 Kümenin Eleman Sayısı

Kümeyi oluşturan nesnelere *kümenin elemanları* denir. Bir kümeye ait elemanların sayısına kümenin eleman sayısı denir ve $s(A)$ ile gösterilir.

Bir A kümesinin 5 tane elemanı varsa, $s(A) = 5$ şeklinde gösterilir.

Örnek:
Verilen $A = \{ a, b, c, d \}$ kümesinin eleman sayısını bulalım.
Verilen A kümesinin eleman sayısı dörttür. $s(A) = 4$ biçiminde gösterilir.
Örnek:
$B = \{ *, \Delta, \mathrm{O} \}$ ise $s(B) = 3$ şeklinde gösterilir.
Örnek:
$D = \{ 0, 2, 4, 6, 8\}$ ise $s(D) = 5$ şeklinde gösterilir.

2.3.3 Eşit Kümeler

A ve B tam olarak aynı elemanlara sahipler ise $A = B$ dir. Yani iki küme de benzer elemanlara sahip olmalıdır.
Örnek:
$A = \{ x \mid 1 < x < 5$ ve x tamsayı $\}$ ve $B = \{ 2, 3, 4 \}$ kümeleri eşit kümelerdir. Çünkü A kümesinde de B kümesinde bulunan elemanlar vardır. $A = \{ 2, 3, 4 \}$, Bu nedenle; $A = B$ dir.

2.3.4 Denk Kümeler

Herhangi iki A ve B kümeleri verilmiş olsun. A ve B kümesinin elemanları, birebir eşlenebiliyorsa bu kümelere, denk kümeler denir. Bir diğer ifade ile eleman sayıları aynı olan kümeler denk kümelerdir.
Bütün eşit kümeler aynı zamanda denk kümelerdir. Fakat denk kümeler her zaman eşit kümeler olmayabilir.

$$A = \{2, 4, 6\} \quad \text{ile} \quad B = \{ k, l, m\}$$

kümeleri denk kümelerdir.

2.3.5 Sonlu Kümeler

Elemanları sayılarak belirtilebilen kümelere sonlu kümeler denir.

$$B = \{ 1, a, 3, d, \qquad * \}$$

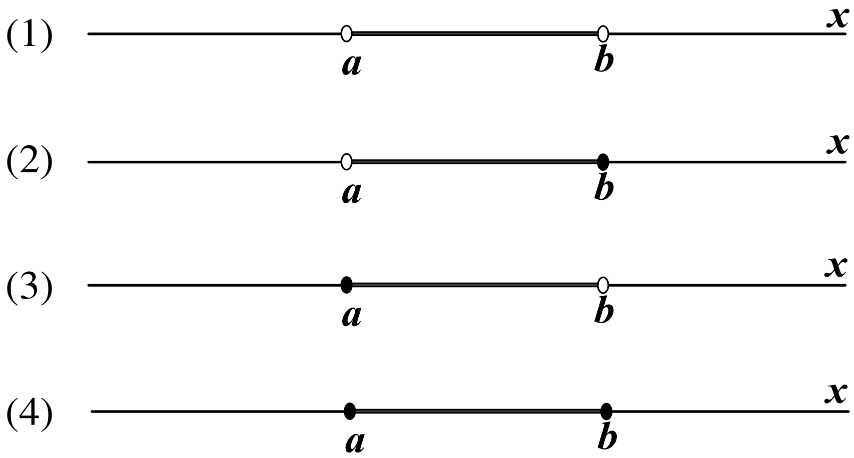
kümesinin 5 elemanı vardır. Eleman sayısı sayılabildiği için sonlu küme olarak adlandırılır.

2.3.6 Sonsuz Kümeler

Elemanları sayılarak belirtilemeyen veya sayılamayacak kadar çok elemanlı olan kümelere, sonsuz kümeler denir. Örneğin Reel Sayılar Kümesi (R) sonsuz kümedir.
Örnek:
Doğal Sayılar kümesi elemanları sayılamadığı ve sonsuza gittiği için bir sonsuz kümedir.
$N = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \infty\}$
Bir doğru üzerindeki noktalar kümesi, doğal sayılar ve tam sayılar kümesinin elemanları sayılamayacak kadar çoktur. Bunun için bu kümelere sonsuz küme denir. Örneğin denizde yaşayan canlıların kümesi veya 1 ile 9 arasındaki reel sayıların kümeleri sonsuz kümelerdir.

2.3.7 Reel Sayı Ekseni ve Aralık Kavramı

a ve b reel sayıları arasındaki reel sayıların kümesini liste yöntemiyle yazamayız. Örneğin şekildeki,
(1) kümesi, (a,b) (açık aralığı) biçiminde ya da $\{ x : a < x < b , x \in R \}$,
(2) no'lu küme, $(a,b]$ biçiminde ya da $\{ x : a < x \leq b , x \in R \}$,
(3) no'lu küme, $[a,b)$ biçiminde ya da $\{ x : a \leq x < b , x \in R \}$ ve
(4) numaralı küme de $[a,b]$ biçiminde ya da $\{ x : a \leq x \leq b , x \in R \}$
biçiminde gösterilir.



Şekil 2.2: Açık ve Kapalı Aralık Tanımları

2.4 Küme Tanımları

2.4.1 Boş Küme

Hiç elemanı bulunmayan kümelere "*boş küme*" denir ve $\emptyset$ veya $\{ \}$ ile gösterilir.
Karekökü negatif olan sayılar kümesi, $\emptyset = \{x |\ x^2 < 0\ ve\ x \in R\}$,
Türkiye'nin C harfi ile başlayan şehirleri kümesi; $\emptyset$

2.4.2 Alt Küme

A ve B birer küme olsun. A kümesinin her elemanı B kümesinin de bir elemanı ise "A kümesi B kümesinin alt kümesidir" denir ve $A \subseteq B$ ile gösterilir. Tersten söylemek istenirse "B kümesi A kümesinin üst kümesidir. B kümesi A kümesini kapsar" veya "B kapsar A'yı" diye okunur ($B \supseteq A$).
n elemanlı bir kümenin alt küme sayısı 2^n ile hesaplanır.

- $n = 3$ elemanlı bir kümenin $2^3 = 2.2.2 = 8$ tane alt kümesi bulunur.
- $n = 5$ elemanlı bir kümenin $2^5 = 2.2.2.2.2 = 32$ tane alt kümesi bulunur.

Örnek:
$B = \{1,2,3\}$ kümesinin alt kümelerini yazınız.
Çözüm:
B kümesi $s(B) = 3$ elemanlı olduğu için $2^3 = 2.2.2 = 8$ tane alt kümesi bulunmaktadır. Bu alt kümeler aşağıda gösterilmektedir.

$B_1 = \{ \}$
$B_2 = \{1\}$
$B_3 = \{2\}$

$B_4 = \{3\}$
$B_5 = \{1,2\}$
$B_6 = \{1,3\}$
$B_7 = \{2,3\}$
$B_8 = \{1,2,3\}$

Örnek:

$A = \{1,3,4,5,8\}$, $B = \{1, 2 ,3, 5 ,7\}$ ve $C = \{1,5\}$ kümeleri ise, aralarındaki alt küme ilişkilerini gösteriniz.

Çözüm:

$C \subset A$ ve $C \subset B$. Bunun nedeni C'nin elemanları olan 1 ve 5 aynı zamanda A ve B kümelerinin de elemanlarıdır. Fakat $B \subset A$ şeklinde söylenemez. Çünkü B'nin bazı elemanları, örneğin 2 ve 7, A kümesine ait değildir.

2.4.3 Öz Alt Küme

A ve B birer küme olsun. A, B'nin alt kümesi ve $A \neq B$ ise A kümesi B kümesinin öz alt kümesidir denir ve $A \subset B$ ile gösterilir.

n elemanlı bir kümenin alt küme sayısı $2^n - 1$ ile hesaplanır.

- *n* **=** 3 elemanlı bir kümenin $2^3 - 1 = 7$ tane öz alt kümesi bulunur.
- *n* **=** 4 elemanlı bir kümenin $2^4 - 1 = 15$ tane öz alt kümesi bulunur.

Örnek:

$A = \{1,3,4,5,8\}$ kümesinin öz alt küme sayısını bulunuz.

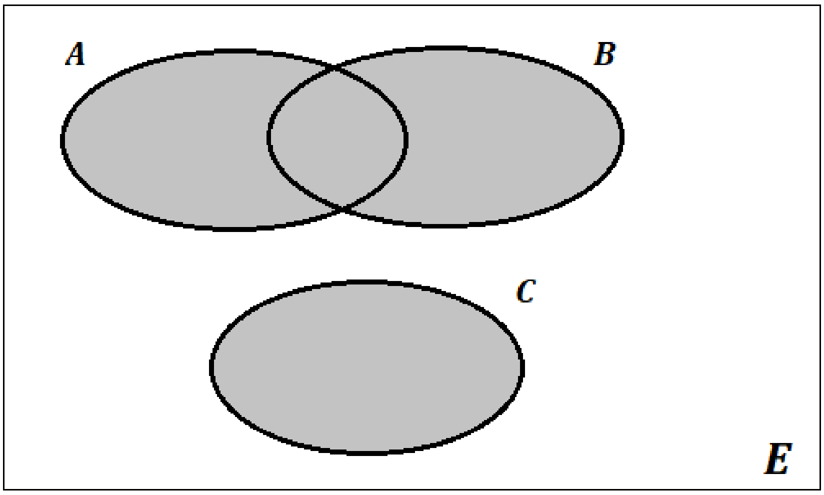
n **=** 5 elemanlı bir kümenin $2^5 - 1 = 32 - 1 = 31$ tane öz alt kümesi bulunur.

Alt Küme Özellikleri

- Boş küme bütün kümelerin bir alt kümesidir. A her hangi bir küme olmak üzere $\emptyset \subset A$ dir.
- Her küme kendisinin bir alt kümesidir. A her hangi bir küme olmak üzere $A \subset A$ dir.
- A, B ve C küme olmak üzere $A \subset B$ ve $B \subset C$ ise $A \subset C$ dır.

2.4.4 Evrensel Küme

Üzerinde işlem yapılan tüm kümeleri kapsayan, boş kümeden farklı, yeterince geniş kümeye *evrensel küme* denir. Genel olarak E veya U harfi ile gösterilir. Evrensel küme; gerekli tüm elemanları içerecek kadar geniş, gereksiz tüm elemanları dışlayacak kadar dar seçilmelidir.



Şekil 2.3: Evrensel Küme (Dikdörtgen içerisindeki tüm elemanların kümesi)

2.4.5 Bir Kümenin Tümleyeni

Evrensel kümenin elemanlarından, bunun bir alt kümesi olan A kümesinin elemanları çıkarılarak elde edilen kümeye *A'nın Tümleyeni* denir. " A' " veya "$\overline{A}$" ile gösterilir.

$$A' = \{x \mid x \notin A, \qquad x \in E\}$$

Örnek:

$$E = \{1,2,3,4,5,6\}, A = \{1,3,5\} \text{ ise } A' = \{2,4,6\}$$

olur.

Evrensel Küme ve Tümleyenin Özellikleri:

$\emptyset' = E$ ve $E' = \emptyset$

Her A kümesi için , $(A')' = A$ dır.

Her A kümesi için , $A \cup A' = E = A' \cup A$ dır.

Her A kümesi için , $A \cap A' = \emptyset = A' \cap A$ dır.

$(A \cap B)' = A' \cup B'$ ve $(A \cup B)' = A' \cap B'$ dir.

$A \subset B \Leftrightarrow B' \subset A'$ dir.

2.4.6 Kuvvet Kümeleri

Bir kümenin bütün alt kümelerinin oluşturduğu kümeye kuvvet kümesi denir.

$A = \{1,2,3\}$ kümesinin kuvvet kümesi $P(A)$;

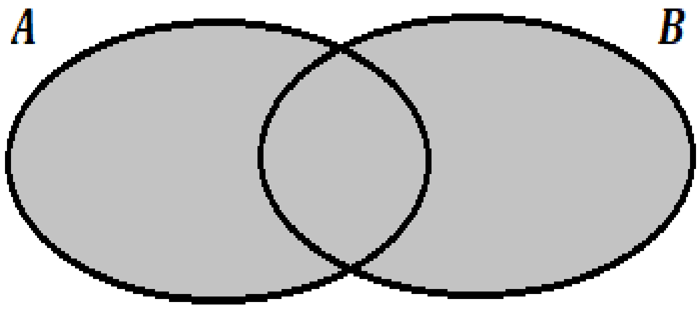
$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

Kuvvet kümesi A kümesinin 8 tane alt kümesinin bir küme içine ayrı ayrı yazılması ile oluşur.

2.5 Kümelerle Yapılan İşlemler

2.5.1 Kümelerin Birleşimi

A ve B kümelerinin birleşimi, $A \cup B$ şeklinde tanımlanır, A veya B'ye ait tüm elemanlarının kümesidir. $A \cup B$ kümesi oluşturulurken A ve B'de bulunan elemanlar yazılır. Ortak elemanlar ise bir defa yazılır.



Şekil 2.4: Kümelerin Birleşimi ($A \cup B$)

Örnek:

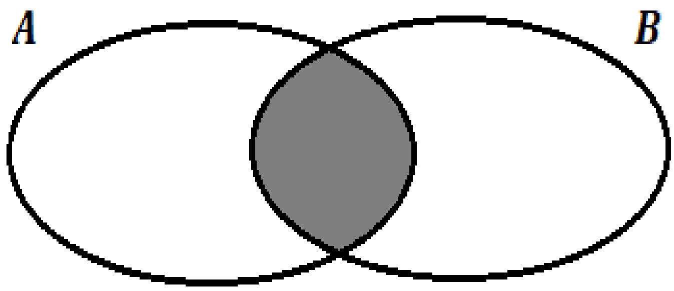
$A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{0, 2, 3,4\}$ kümeleri iseler, A birleşim B kümesi,

$$A \cup B = \{0,1,2,3,4\}$$

olur.

2.5.2 Kümelerin Kesişimi

Diğer yandan A ve B kümelerinin kesişimi, $A \cap B$ şeklinde tanımlanır, hem A hem de B'ye ait elemanların yani A ve B'deki ortak elemanların kümesidir.



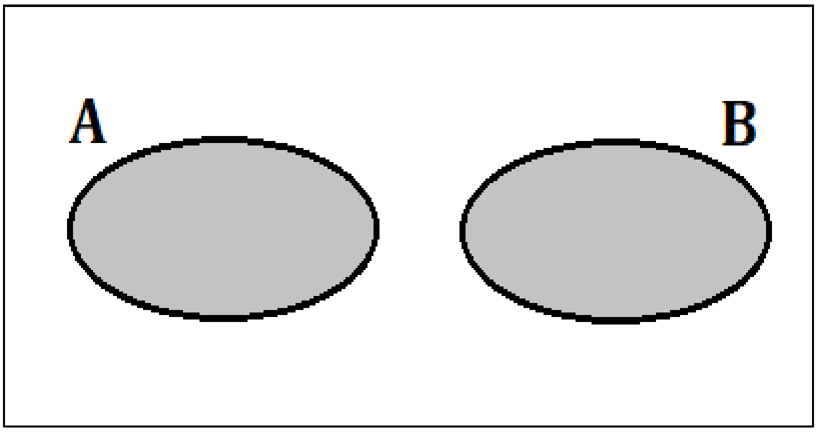
Şekil 2.5: Kümelerin Kesişimi ($A \cap B$)

Örnek:

$A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{0, 2, 3,4\}$ kümeleri iseler, A kesişim B kümesi,

$A \cap B = \{2,3\}$ olur.

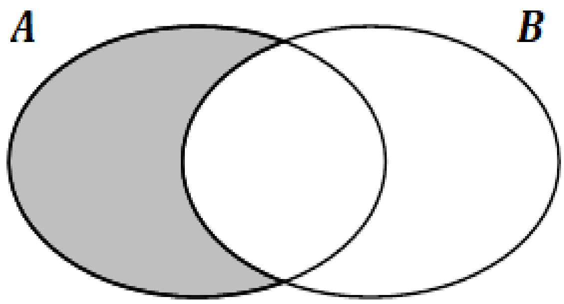
Bunun yanında $A \cap B = \emptyset$ ise A ve B kümelerine **ayrık kümeler** adı verilir.



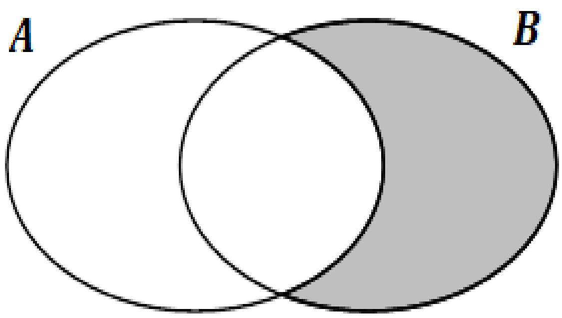
Şekil 1-6: Ayrık Kümeler ($A \cap B = \emptyset$)

2.5.3 Fark Kümeleri

A kümesi bir B kümesinin alt kümesi değilse ya da A'nın en azından bir elemanı B'ye ait değilse, bu küme A fark B kümesidir. \ çizgisi ile gösterilebilir.
Aşağıdaki şekilde $B\backslash A$ kümesi gösterilmektedir.



Şekil 2.7: İki Küme Farkı ($\boldsymbol{A\backslash B}$)



Şekil 2.8: İki Küme Farkı ($\boldsymbol{B\backslash A}$)

2.5.4 Küme ile İlgili Kurallar

- $A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cup A = A, \quad A \cap A = A$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$
- $A \cup B = B \cup A, \; A \cap B = B \cap A$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

A, B ve C birer küme olsun;

- A $\subseteq$ B ise A / B = $\emptyset$'dir.
- $A \cap B = \emptyset$ eğer ve yalnız eğer $A\backslash B = A$'dır.
- $A\backslash(B \cup C) = (A\backslash B) \cap (A\backslash C)$
- $A\backslash(B \cap C) = (A\backslash B) \cup (A\backslash C)$
- $A \cap (B\backslash C) = (A \cap B)\backslash(A \cap C)$
- $(A \cup B)\backslash C = (A\backslash C) \cup (B\backslash C)$
- $(A \cup B)\backslash C = (A\backslash C) \cup (B\backslash C)$

Uygulama

1) Sayılar konusu ilk bölümde incelenmişti. Sayı kümelerini küme olarak göstermek istersek, Reel sayılar kümesinin, Rasyonel ve İrrasyonel Sayı kümelerinin birleşimi olduğunu görürüz.

$$R = Q \cup I$$
$$Q \subset R$$
$$I \subset R$$

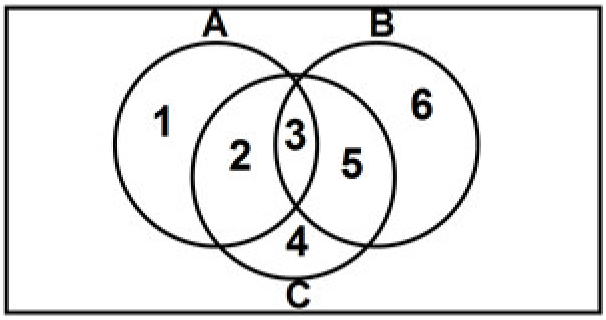
Rasyonel Sayılar da tamsayılar kümesinin bütün elemanlarını içerdiğinden,

$$Q \supset Z$$
$$Z \subset Q$$

Tam sayılar da doğal sayıları kendi içerisinde barındırdığından, doğal sayılar kümesini dolayısıyla sayma sayılar kümesini kapsamaktadır.

$$Z \supset N$$
$$N \subset Z$$

2)



Yukarıda verilen Venn Şemasına göre aşağıdaki kümeleri liste şeklinde gösteriniz.

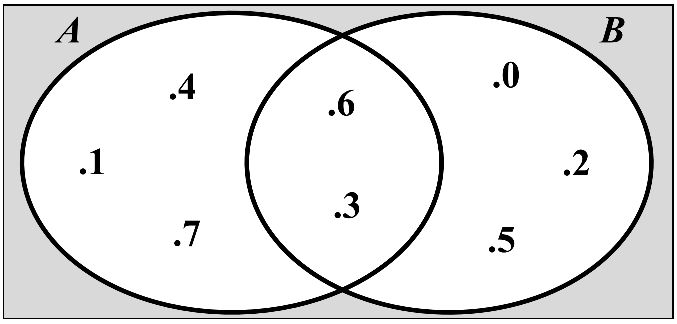
$A = \{1,2,3\}$
$B = \{2,3,4,5\}$
$C = \{3,4,5,6\}$
$A \cup B = \{1,2,3,5,6\}$
$A \cup C = \{1,2,3,4,5\}$
$B \cup C = \{2,3,4,5,6\}$
$A \cap B = \{3\}$
$A \cap C = \{2,3\}$
$B \cap C = \{3,5\}$
$A \cap B \cap C = \{3\}$
$A - B = \{1,2\}$
$A - C = \{1\}$
$B - C = \{6\}$
$B - A = \{5,6\}$
$C - A = \{4,5\}$
$C - B = \{2,4\}$

Uygulama Soruları

1) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$A \cap B = \{3, 6\}$
$A \setminus B = \{1, 4, 7\}$ ise B kümesinin eleman sayısı kaçtır?

Çözüm:

Aşağıdaki Venn şemasında görüldüğü gibi A'nın B'den farklı olan elemanları, $A \setminus B = \{1, 4, 7\}$ ve B ile aynı olan elemanları $A \cap B = \{3, 6\}$'dır. Dolayısıyla bu iki kümenin elemanları A kümesini oluşturur. $A = \{1, 3, 4, 6, 7\}$. $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ve $A \cap B = \{3, 6\}$ olduğuna göre, B kümesi $B = \{0, 2, 3, 5, 6\}$ olur. Dolayısıyla B kümesinin eleman sayısı 5 olduğu görülür.



2) $A = \{x |\ x \in [-3,\ 5),\ x \in Z\}$ olarak tanımlanan kümeyi listeleme yöntemi ile gösteriniz.

Çözüm:

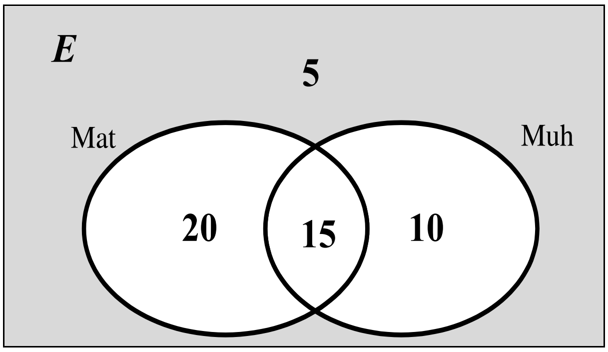
Verilen aralıkta $[-3,\ 5)$, -3 sayısının solunda köşeli parantez bulunduğundan, küme içerisinde -3 bulunmakta, ancak 5 sayısının sağında normal parantez bulunduğundan küme içerisine dâhil edilmez. Bu aralıkta bulunan tamsayılar $A = \{-3, -2, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ olmalıdır.

3) 50 kişilik bir sınıfta 35 öğrenci Matematikten, 25 öğrenci de Muhasebe dersinden başarılı olmuştur. Hem muhasebeden hem de Matematikten başarılı olmuş 15 kişi olduğuna göre, sınıfta her iki dersten de başarısız olan kaç kişi bulunmaktadır?

Çözüm:

$s(A) = 35$ ve $s(B) = 25$ $\quad s(E) = s(A \cup B) + s(A \cup B)' = 50$
$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$
$s(A \cup B) = 35 + 25 - 15$
$s(A \cup B) = 45$
$s(A \cup B)' = s(E) - s(A \cup B) = 50 - 45 = 5$

İki dersten başarılı olanlar 15 kişidir. İki dersin ikisinden de aynı anda başarılı olamayan 5 kişi bulunmaktadır.



4) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,4,5\}$ ve $C = \{5,6,7\}$ kümelerini kullanarak $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cup B \cup C$ ve $A \cap B \cap C$ kümelerini bulunuz.

Çözüm:

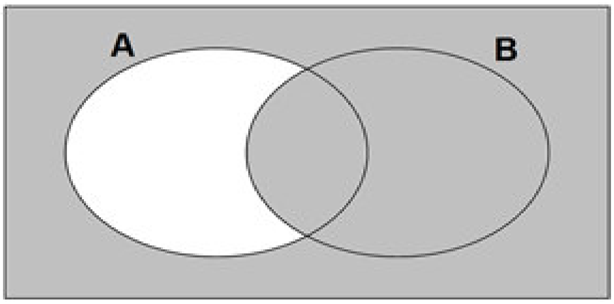
$A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$
$A \cap B = \{2\}$
$A \backslash B = \{1,3\}$
$B \backslash A = \{4,5\}$
$A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7\}$
$A \cap B \cap C = \{\ \}$

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde matematiğin temel konusu olan **kümeler** konusu ele alınmıştır. Bölümde; küme tanımı, küme özellikleri, küme işlemleri, sayı kümeleri ayrıntılı olarak işlenmiştir. Modern matematiğin temelini oluşturan kümeler konusu, bağıntı ve fonksiyon kavramının temel taşlarından biridir.

Bölüm Soruları

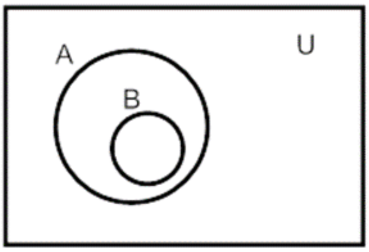
1) Aşağıda verilen Venn şemasına göre**,** beyaz renkli bölgenin gösterimi hangi şıkta doğru olarak verilmektedir?

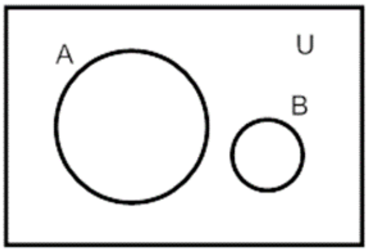


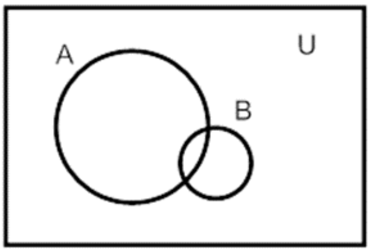
a) $B - A$
b) $A \cap B$
c) $A \cup B$
d) $A - B$
e) $\emptyset$

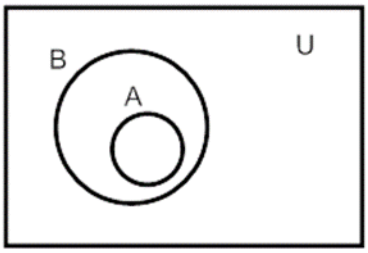
2) Aşağıdaki şıklarda verilenlerden hangisi $P = (8, 16, 24, 32, \ldots\ 800)$ kümesinin eşitidir?
a) $A = (a|a = 4x,\ 2 \leq x\ \leq\ 200,\ x \in N)$
b) $B = (b|b = 8x, \quad x \in N)$
c) $C = (c|c = 8x,\ 1 \leq x\ \leq\ 100,\ x \in N)$
d) $D = (d|d = 4x,\ x \in N)$
e) $E = \emptyset$

3) Aşağıda verilen şıklardaki Venn şemalarına göre hangisinde $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ olur?

a) 

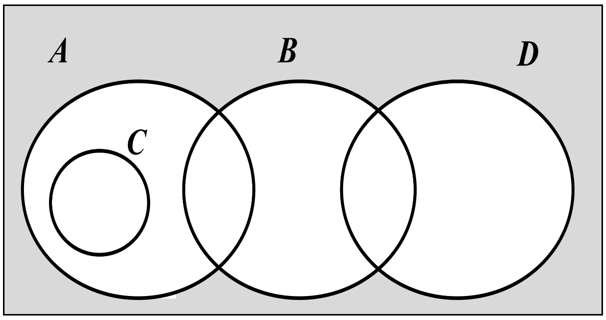
b) 

c) 

d) 

e) $A = B$

4) Aşağıda verilen Venn Şemasına göre şıklardan hangisi <u>yanlıştır</u>?



a) $A \cap C = A$
b) $A \supset C$
c) $C \subset A$
d) $A \cap D = \emptyset$
e) $C \setminus A = \emptyset$

5) Dört elemanlı bir kümenin kaç tane alt kümesi vardır?
a) 16 b) 15 c) 8 d) 7 e) 4

6) Sayı kümeleri için aşağıdaki ifadelerden hangisi doğrudur?
a) $Z \subset N$ b) $R \subset Z$ c) $R \supset N \supset Z$ d) $Z \not\subset R$ e) $N \subset Z \subset R$

7) $A = \{1, 3, 5, 7\}$ ve $B = \{2, 3, 5, 8\}$ kümeleri için $A \cap B$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
a) $\{2, 3, 5, 8\}$ b) $\{3, 5\}$ c) $\{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$ d) $\{1, 3, 5, 7\}$ e) $\emptyset$

8) $A = \{2, 3, 5, 9\}$ kümesinin öz alt küme sayısı kaçtır?
a) 32 b) 16 c) 15 d) 8 e) 7

9) $A = \{a; a,$ İKTİSAT kemesinin harfleri$\}$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
a) $A = \{K, T, S\}$ b) $A = \{$ İ$, K, T,$ İ$, S, A, T\}$ c) $A = \{$ İ$, K, T, S, A\}$
d) $A = \{$ İ$, S, T\}$ e) $A = \{K, S, A, T\}$

10) $A = \{1, 3, 5, 7\}$ ve $B = \{2, 3, 5, 8\}$ kümeleri için $A \setminus B$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
a) $\{1, 7\}$ b) $\{2, 8\}$ c) $\{1, 3, 5, 7\}$ d) $\{1, 2, 7, 8\}$ e) $\emptyset$

Cevaplar

1) d, 2) c, 3) b, 4) a, 5) a, 6) e, 7) b, 8) c, 9) c, 10) a

3. DENKLEMLER, EŞİTSİZLİKLER VE MUTLAK DEĞER KAVRAMI

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

3.1. Denklemler
3.2. Doğrusal Denklemler
3.3. İkinci Dereceden Denklemler
3.4. Rasyonel Denklemler
3.5. Üslü ve Köklü İfade içeren Denklemler, Cebrik Denklemler
3.6. Eşitsizlikler
3.7. Doğrusal Eşitsizlikler
3.8. İkinci Dereceden Eşitsizlikler

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1) Denklem nedir? Ne değildir?

2) Denklem tipleri nelerdir?

3) Eşitsizlik nedir?

4) Eşitsizliklerin çözümü ile denklemlerin çözümü arasındaki fark nedir?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	**Kazanım**	**Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği**
Denklemler	Denklemi tanımlayabilmek	Okuyarak, fikir yürüterek
Doğrusal Denklem ve İkinci Dereceden Denklem	Denklemin tipini belirleyebilme	Okuyarak, fikir yürüterek
Denklem Çözümü	Denklemleri çözebilme	Okuyarak, fikir yürüterek, uygulama yaparak
Eşitsizlik ve Denklem Arasındaki Fark	Eşitsizlik ve Denklem arasındaki farkı kavrama	Okuyarak, fikir yürüterek, uygulama yapmak

Anahtar Kavramlar

- Denklem
- Eşitsizlik
- Doğrusal
- Kuadratik
- Rasyonel Denklem

Giriş

Günlük yaşamda sıkça karşılaştığımız ve dört işlemle çözmekte zorlandığımız hatta bazen çözemediğimiz sayısal ve sosyal bilimlerdeki pek çok problemi denklemler yardımıyla (denklem kurarak) çözülebilir duruma getirebilmekteyiz. Bu nedenle denklem çözümlerinin bilinmesi işletme, ekonomi ve sosyal bilimler açısından da oldukça önemli olmuş ve matematikçiler denklemlerin çözümünde izlenebilecek bir yöntem bulmaya çalışmışlardır.

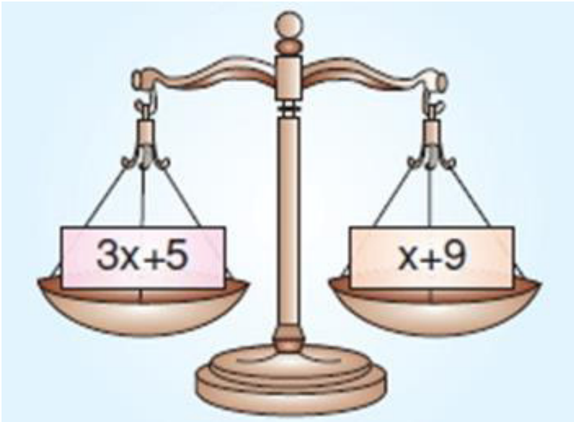
Havuz problemleri, işçi problemleri, oran orantı problemleri, faiz problemleri, gelir gider maliyet denklemleri, tüketim ve harcama problemleri, gayri safi milli hasıla problemleri denklem kurma (matematiksel modelleme) yardımı ile kolaylıkla çözülebilir.

3.1 Denklemler - (Eşitlikler)

İki niceliğin eşitliğinin matematik ifadesine denklem denir. Eşitliğin iki tarafı aşağıda görülen bir terazi gibi düşünülebilir. Eşitlik olması bu terazinin dengede olduğunu, eşitsizlik olması durumunda da terazi kefelerinden birinin diğerine göre büyük olduğu anlamına gelir. Verilen eşitliğin bir denklem olabilmesi için eşitliğin ya bir tarafında ya da her iki tarafında en az bir bilinmeyen bulunmalıdır. Bu bilinmeyen genellikle, x, y, z, t, u, v ... gibi sembollerle gösterilir. Cebirde en sık kullanılan sembol $\boldsymbol{x}$ ve $\boldsymbol{y}$ harfidir. Bilinmeyenlerin katsayıları da genellikle reel sayılar kümesine dahil olan a, b, c, m, n, k ... gibi harflerle gösterilir.

Denklemi sağlayan sayılara **denklemin kökleri** (çözümleri), kökleri bulma işlemine **denklem çözme**, denklemin köklerinin kümesine de **çözüm kümesi** denir.

Aşağıda bir bilinmeyenli [$3x + 5 = x + 9$] denklemi temsili olarak gösterilmektedir.



Şekil 3.1: Temsili Denklem Gösterimi

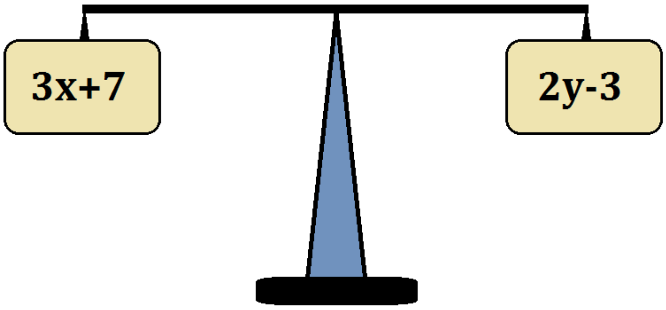
Denklemlerin farklı türleri bulunmaktadır. Bilinmeyen sayısına göre denklemler bir bilinmeyenli, iki bilinmeyenli, üç bilinmeyenli… olarak sınıflandırılırlar. Bilinmeyenin üssüne (kuvvetine) göre de denklemin derecesi veya tipi belirlenir. .aşağıda farklı tipte denklem örnekleri verilmektedir.

Denklem Örnekleri:

Aşağıda farklı tipten denklemlere örnekler verilmektedir.

1)	$x + 2 = 5$	2)	$3x^2 - 4x + 7 = 0$
3)	$4x^2 - 7 = 29$	4)	$S = 100.(1 + 0{,}12)^n$
5)	$\frac{y}{y-5} = 6$	6)	$2x + 3y = 18$
7)	$3x + 5y = 11$	8)	$x^3 - 8 = 0$
9)	$z = 3x + 5y$	10)	$e^x = 1$
11)	$I = P.r.t$	12)	$\log x = 2$

Aşağıda verilen denklemin sol tarafında x bilinmeyeni sağ tarafında ise y bilinmeyeni bulunmaktadır. Denklemde iki bilinmeyen bulunduğu için iki bilinmeyenli denklem adını alır. İki bilinmeyenin her ikisi birden sağda ya da solda bulunabilir.



Şekil 3.2: Denklem Gösterimi

Matematikte her tür denklemin çözümünde izlenen yol aynı olmadığından denklemler sınıflara ayrılarak her bir sınıf için bir çözüm yöntemi verilmeye çalışılmıştır.

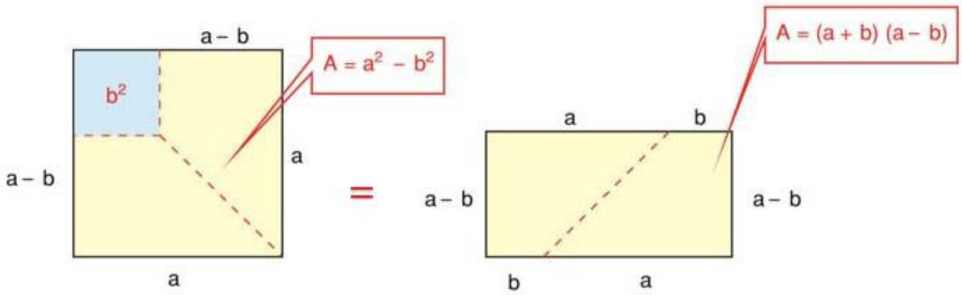
Denklem çözümlerinde özdeşlik ve Binom açılımları sıkça kullanıldığından bu açılımlar aşağıda verilmektedir.

3.1.1 Denklem Çözümünde Sık Kullanılan Özdeşlikler

Özdeşlik, bilinmeyenin her değeri için doğru olan yani çözüm kümesi Reel Sayılar olan açık eşitliklere denir. En sık kullanılan özdeşlikler aşağıda tanıtılmaktadır.

İki Kare Farkı

$$\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)}$$



Şekil 3.3: İki kare farkı açılımı

Örnek:

$$\begin{aligned} 8^2 - 2^2 &= (8-2)(8+2) \\ &= 6.10 \\ &= 60 \end{aligned}$$

Örnek:

$$\begin{aligned} 88^2 - 12^2 &= (88-12)(88+12) \\ &= 76.100 \\ &= 7600 \end{aligned}$$

İki Kare Toplamı

$$\boldsymbol{a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab}$$

Örnek:

$$8^2 + 2^2 = (8+2)^2 - 2.8.2$$
$$64 + 4 = (10)^2 - 32$$
$$64 + 4 = 100 - 32$$

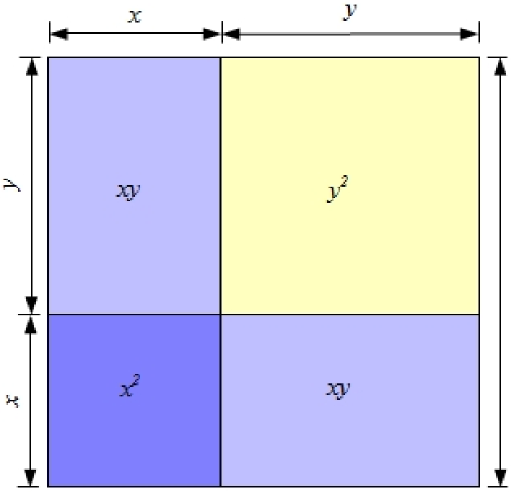
$$68 = 68$$

Tam Kare Açılımları

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Örnek:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$



Şekil 3.4: İki Kare Toplamı

Örnek:

$$(6 - 4)^2 = 6^2 - 2.6.4 + 4^2$$
$$= 36 - 48 + 16$$
$$= 52 - 48$$
$$= 4$$

Küp Açılımları

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Örnek:

$$(6 + 4)^3 = 6^3 + 3.6^2.4 + 3.6.4^2 + 4^3$$
$$= 216 + 432 + +288 + 64$$
$$= 1000$$

Örnek:

$$(6 - 4)^3 = 6^3 - 3.6^2.4 + 3.6.4^2 - 4^3$$
$$= 216 - 432 + 288 - 64$$
$$= 8$$

Küp Toplamı

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Örnek:

$$x^3 + 125 = (x + 5)(x^2 - 5x + 25)$$

Küp Farkı

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Örnek:

$$27a^3 - 64b^3 = (3a - 4b)(9a^2 + 12ab + 16b^2)$$

Ortak Paranteze Alma

a) $3x + 3y = 3(x + y)$
b) $5m - 10mn = 5m(1 - 2n)$
c) $12x + 9y = 3(4x + 3y)$
d) $3a^2b - 2ab^2 = ab(3a - 2b)$

Matematiksel İfadeleri Gruplama

Bütün terimlerde ortak çarpan yoksa verilen ifadenin terimleri uygun şekillerde gruplara ayrılır İkişer ikişer, üçer üçer gruplandırılır. Gruplar ayrı ayrı ortak çarpanlarına ayrılır. Ayrılan gruplarda ortak bir çarpan aranır. Terimlerde bulunan ortak çarpan parantezin dışına alınır.

Örnek:

$$5a^2 + 10a = 5a(a + 2)$$

(5a ortak eleman)

Örnek:

$$ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b)$$

($(a + b)$ ortak)

$$= (a + b)(x + y)$$

biçiminde gruplanır.

Örnek:

$$2x^2 - 4x - 1x + 2$$
$$= 2x(x - 2) - 1(x - 2)$$
$$= (x - 2)(2x - 1)$$

Örnek:

$mx + ny + my + nx$ terimini sadeleştiriniz.

Çözüm:

$$mx + ny + my + nx = mx + nx + ny + my$$
$$= x(m + n) + y(n + m)$$
$$= (m + n)(x + y)$$

Örnek:

$$xy - xb - yb + b^2$$
$$= xy - yb + b^2 - xb$$
$$= y(x - b) + b(b - x)$$
$$= y(x - b) - b(x - b)$$
$$= (x - b)(y - b)$$

Örnek:

$$\frac{ax+bx+ay+by}{(a+b)(x+y)}=?$$

$$ax+bx+ay+by=x(a+b)+y(a+b)=(a+b)(x+y)$$

olarak gruplanır. Sadeleştirme yapılırsa;

$$\frac{(a+b)(x+y)}{(a+b)(x+y)}=1$$

olur.

Örnek:

x^2-6x+5 ifadesini, x'li terimin katsayısının yarısının karesini ekleyip çıkararak çarpanlarına ayırınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned} x^2-6x+5+3^2-3^2 &= x^2-6x+3^2-3^2+5 \\ &= (x-3)^2+5-9 \\ &= (x-3)^2-4 \\ &= (x-3)^2-2^2 \\ &= [(x-3)-2].[(x-3)+2] \\ &= (x-5).(x-1) \end{aligned}$$

Çarpanlarına ayırma:

a, b ve $c \in R$, $a \neq 0$ olmak üzere; $ax^2+bx+c=0$ denklemi verildiğinde; eğer $\boldsymbol{a}=\mathbf{1}$ ise, çarpımları c, toplamları b olan iki sayı aranır. Bulunan bu sayılar denklemin köklerinin ters işaretlisi olan sayılardır.

$$x^2+\boldsymbol{b}x+\boldsymbol{c}=0$$

$$x_1.x_2=\boldsymbol{c}$$

$$x_1+x_2=\boldsymbol{b}$$

Buradaki x_1 ve x_2 denklemin köklerinin ters işaretli olan sayılarıdır.

$\boldsymbol{c}$ sayısı pozitif olduğunda, bulunacak sayıların her ikisi de pozitif veya her ikisi de negatif olmalı, $\boldsymbol{c}$ sayısı negatif olduğunda, bulunacak sayıların biri pozitif veya diğeri negatif olmalıdır. $\boldsymbol{b}$ pozitif ise bulunan sayılardan büyüğü (+) işaretli, küçüğü ise (-) işaretli olmalıdır. $\boldsymbol{b}$ negatif ise bulunan sayılardan büyüğü (-) işaretli, küçüğü ise (+) işaretli olmalıdır.

Diğer bir deyişle, b'nin işareti ne olursa olsun, bulunan sayıların toplamını oluşturmalıdır.

$x^2-3x-4=0$ olsun.

Bu denklemde $a=1$, $b=\ -3$ ve $c=-4$'tür.

Çarpımları -4, toplamları -3 olan iki sayı bulunur. Bu sayılar; -4 ve 1'dir. Bulunan bu sayılar denklemin çözümü değildir.

Dolayısıyla verilen denklem;

$$(x+1)(x-4)=0$$

biçiminde çarpanlarına ayrılır. Bu denklem çözüldüğünde;

$x = -1$ ve $x = 4$ olarak bulunur. Bulunan sayıların ters işaretli olanları denklemin çözümünü oluşturur.

$x^2 + 5x - 6 = 0$

$(x + 6)(x - 1) = 0$

$\boldsymbol{a} \neq \mathbf{1}$ olduğu takdirde; aşağıdaki işlem uygulanarak çarpanlara ayrılır.

$(mx.q + nx.p = bx$ $m.n = a$ ve $p.q = c$ oluyorsa),

$ax^2 + bx + c = (mx + p)(nx + q)$

$\begin{pmatrix} mx & \times & p \\ nx & & q \end{pmatrix}$

$2x^2 - 5x + 2 = 0$ $\quad 2x.(-2) + x.(-1) = -5x \quad b = -5$

$(2x - 1)(x - 2) = 0$ $\quad m.n = 2.1 = 2 = a$ ve $(-1).(-2) = 2 = c$

$\begin{pmatrix} 2x & \times & -1 \\ x & & -2 \end{pmatrix}$

$6x^2 + 7x - 3 = (3x - 1)(2x + 3)$ olur.

$3x \qquad -1 \qquad (3x.3 - 1.2x = 9x - 2x = 7x$ olduğundan)

$2x \qquad +3$

$(3x - 1)(2x + 3) = 0$

$x = 1/3$ ve $x = -3/2$

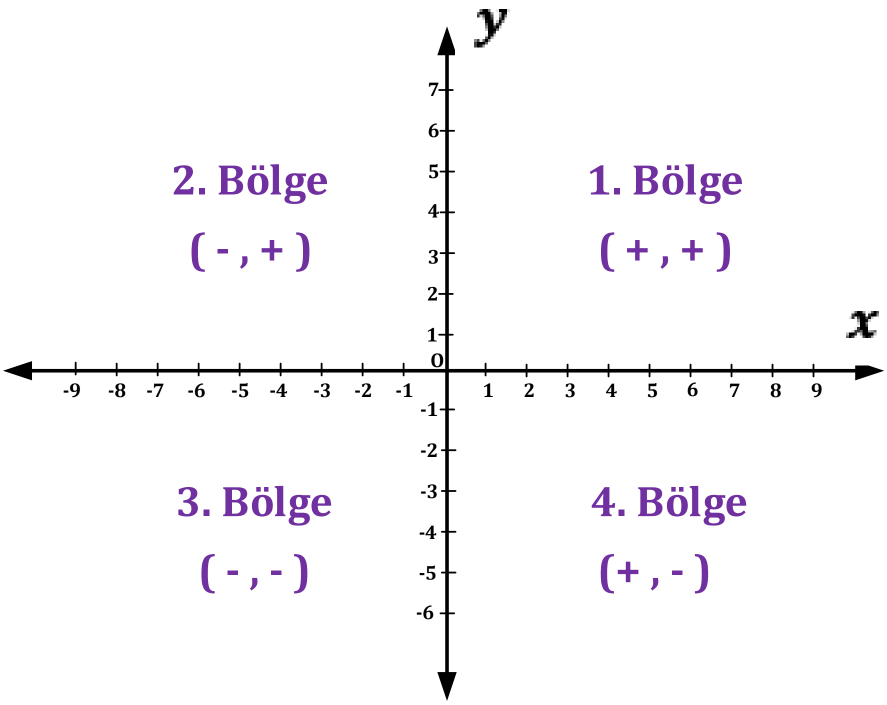
çözümleri elde edilir.

3.1.2 Kartezyen Koordinat Sistemi

İki bilinmeyenli bir denklemin çözümlerini analitik düzlemde göstermek mümkündür ve buna grafikle çözüm denir. Analitik düzlemi ve bu düzlemde her noktanın bir sayı ikilisine eşlenmektedir. Sayı ekseni tanımını genişleterek düzlemde ve uzayda noktalar için de koordinatlar tanımlanabilir. Düzlemde noktaların koordinatlarını tanımlamak için, düzlemde birbirini orijinlerinde dik olarak kesen iki sayı ekseni kullanmak yeterlidir. Genellikle bu eksenlerden biri yatay diğeri de düşey olarak seçilir; yatay olanına x-ekseni, düşey olanına y-ekseni denir. Düzlemde bu şekilde seçilmiş eksenlerin oluşturduğu şekle Kartezyen Koordinat Sistemi, eksenlerin kesim noktasına da bu sistemin orijini denir ve genellikle O harfi ile gösterilir. x- ve y- eksenleri düzlemi dört bölgeye ayırır.

Sayı ekseni tanımını genişleterek düzlemde ve uzayda noktalar için de koordinatlar tanımlayabiliriz. Düzlemde noktaların koordinatlarını tanımlamak için, düzlemde birbirini orijinlerinde dik olarak kesen iki sayı ekseni kullanmak yeterlidir. Genellikle bu eksenlerden biri yatay diğeri de düşey olarak seçilir; yatay olanına x-ekseni, düşey olanına y-ekseni denir. Düzlemde bu şekilde seçilmiş eksenlerin oluşturduğu şekle Kartezyen Koordinat Sistemi, eksenlerin kesim noktasına da bu sistemin orijini denir ve genellikle O harfi ile gösterilir.

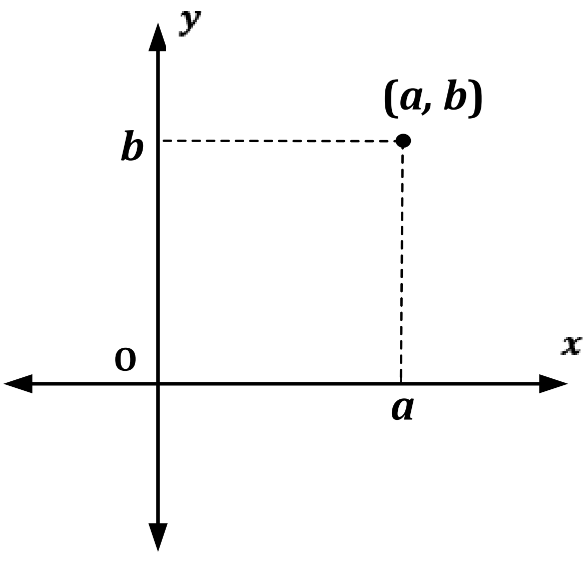
$x -$ ekseni ve $y -$ eksenleri düzlemi dört bölgeye ayırır. Aşağıda kartezyen koordinat sisteminin bölgeleri gösterilmektedir.



Şekil 3.5: Kartezyen Koordinat Sisteminde Bölgeler

Düzlemde bir noktaya karşılık gelen sıralı reel sayı ikilisi şöyle belirlenir: Verilen noktadan her iki eksene birer dikme indirilir. x-eksenine indirilen dikmenin ayağı bir a sayısına, y-eksenine indirilen dikmenin ayağı bir b sayısına karşılık gelir. Verilen noktaya karşılık gelen reel sayı ikilisi $(a\,,b)$ dir. a sayısına o noktanın x-koordinatı veya apsisi; b sayısına da y-koordinatı veya ordinatı denir.

Verilen bir $(a\,,b)$ sıralı reel sayı ikilisine karşılık gelen noktayı bulmak için yukarıdaki işlem tersine işletilir. Daha açık bir ifadeyle, önce x-ekseni üzerinde a noktası ve y-ekseni üzerinde b noktası bulunur ve sonra her iki noktadan ait oldukları eksene birer dikme çıkılır; bu dikmelerin kesim noktası, apsisi a ve ordinatı b olan noktadır.



Şekil 3.6: Kartezyen Koordinat Sisteminde Nokta Gösterimi

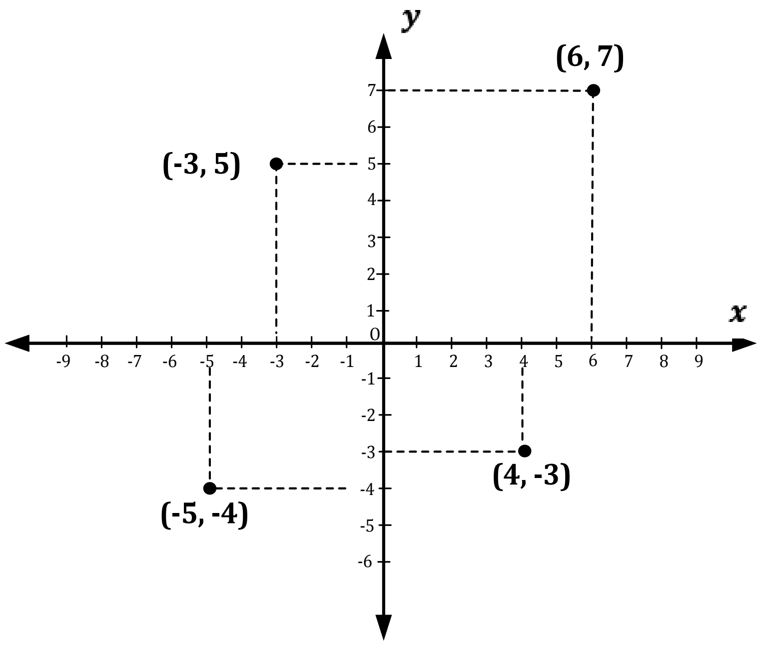
Düzlemde bir noktaya karşılık gelen sıralı reel sayı ikilisi şöyle belirlenir: Verilen noktadan her iki eksene birer dikme indirilir. x-eksenine indirilen dikmenin ayağı bir a sayısına, y-eksenine indirilen dikmenin ayağı bir b sayısına karşılık gelir. Verilen noktaya karşılık gelen reel sayı ikilisi $(a\,,b)$ dir. a sayısına o noktanın $\boldsymbol{x}$-koordinatı veya **apsis**i; b sayısına da y-koordinatı veya **ordinat**ı denir.
Verilen bir $(a\,,b)$ sıralı reel sayı ikilisine karşılık gelen noktayı bulmak için yukarıdaki işlem tersine işletilir. Daha açık bir ifadeyle, önce x-ekseni üzerinde a noktası ve y-ekseni üzerinde b noktası bulunur ve sonra her iki noktadan ait oldukları eksene birer dikme çıkılır; bu dikmelerin kesim noktası, apsisi a ve ordinatı b olan noktadır.
"20 cm. uzunluğunda bir çubuktan kaç değişik dikdörtgen çerçeve yapılabilir?" problemi $2x + 2y = 20$ denkleminin çözümünü gerektirir. Burada da sonsuz tane (x, y) değeri ortaya çıkar. Eğer x ve y tam sayı olmak zorunda ise bu sonsuz çözüm içerisinden bazıları çözüm olur ve çözüm sayısı sonlu hale gelir. (Kare, aynı zamanda bir dikdörtgendir)

$$2x + 2y = 20$$
$$x + y = 10$$

Tamsayı çözümler;

$\boldsymbol{x}$:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\boldsymbol{y}$:	9	8	7	6	5	4	5	2	1

Aşağıda verilen kartezyen koordinat sisteminde dört farklı bölgede dört sıralı ikili (nokta) ve o noktaların aldığı işaretler gösterilmektedir. Bir sıralı ikilide ilk sayı apsisi ($\boldsymbol{x}$), ikinci sayı ordinatı ($\boldsymbol{y}$) ifade eder.



Şekil 3.7: Kartezyen Koordinat Sisteminde bölgelere göre işaret değişimi

3.2 Doğrusal Denklemler

3.2.1 Bir Bilinmeyenli Doğrusal Denklemler

a ve b gerçel (reel) sayılar ve $a \neq 0$ olmak üzere,

$$ax + b = 0$$

biçimindeki eşitliklere birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem denir. Denklemin kökü, $ax + b = 0$ eşitliği sabit terimler bir tarafta, bilinmeyen x'i içeren terimler bir tarafta olacak şekilde düzenlenir ve aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$ax = -b \quad ; \quad x = \frac{-b}{a}$$

Örnek:

$$5x - 30 = 2x - 18$$

denklemini çözünüz.

Çözüm:

$$5x - 30 = 2x - 18$$
$$5x - 2x = -18 + 30$$
$$3x = 12$$
$$x = \frac{12}{3} = 4$$

3.3 İki Bilinmeyenli Doğrusal Denklemler

a, b ve c gerçel sayılar ve $a \neq 0$, $b \neq 0$ olmak üzere $ax + by + c = 0$ biçimindeki denklemlere birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemler denir. Denklemi sağlayan (x, y) ikililerine denklemin kökleri denir.

3.3.1 Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklemler

$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in R$ olmak üzere;

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

denklemleri verilsin. İki veya daha çok sayıda verilen birinci dereceden (doğrusal) iki bilinmeyenli denkleme birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi (denklem takımı) denir.

Denklem sistemindeki tüm denklemleri sağlayan (x, y) ikilisi (veya ikilileri) varsa bunlara denklem sisteminin çözümü denir.

Örnek:

$$2x + y = 8$$
$$-x + y = 2$$

denklem sisteminin çözümü nedir?

Çözüm:

$$2x + y = 8$$
$$-x + y = 2$$

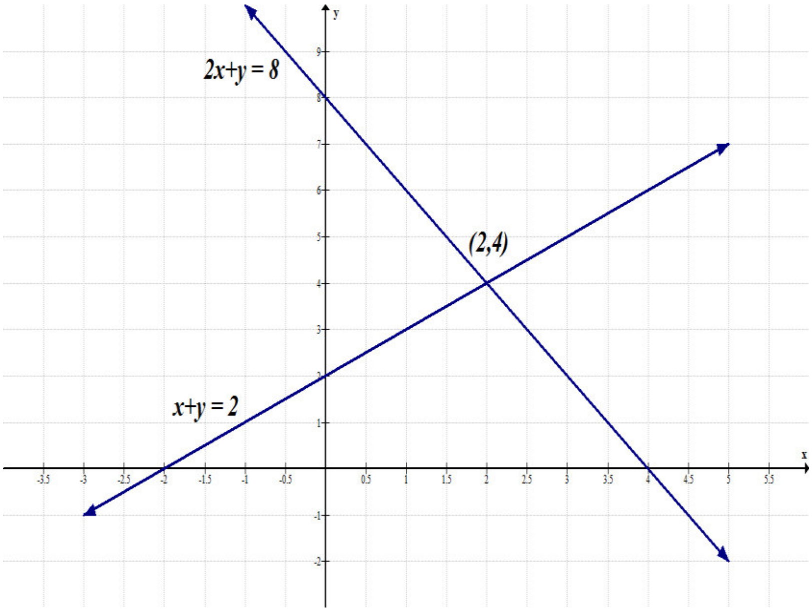
İkinci denklemde y'nin işaretini negatif yapmak için ikinci denklem -1 ile çarpılır ve toplama yapılarak y'ler yok edilir. Bu sırada eşitliğin sağ tarafı da toplanır. x değeri elde edilmiş olur.

$$2x + y = 8$$
$$x - y = -2$$
$$3x = 6$$
$$x = 2$$

Bulunan x'in bulunan değeri herhangi bir denklemde x yerine yerine konarak, y elde edilir.

$$-x + y = 2 \quad \rightarrow \quad -2 + y = 2 \quad \rightarrow y = 4$$

Denklemin çözüm kümesi; $\text{Ç.K.} = (2,4)$ çıkar.



Şekil 3.8: İki Doğrunun Kesişimi ve Bulunan Noktanın Gösterimi

3.3.2 İkinci Dereceden (Kuadratik) Denklemler

a, b ve c gerçel sayılar ve $a \neq 0$, $b \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ şeklinde yazılabilen denklemler ikinci dereceden denklemler olarak adlandırılmaktadır. İkinci dereceden denklemlerin çözümünde eğer denklem daha önce anlatılan özdeşlik ve Binom açılımları kullanılarak çarpanlarına ayrılabiliyorsa, çarpanlarına ayırma yöntemi kullanılabilir. Çarpanlarına ayrılamayan denklemler için diskriminant hesabı ile kökler hesaplanabilmektedir.

a) Çarpanlara Ayırma Yöntemi:

İkinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerin köklerini bulmada çarpanlara ayırma yöntemi de kullanılabilmektedir. Çarpanlara ayırma yönteminde ikinci dereceden denklem, iki tane birince dereceden denklemin çarpımı olarak yazılmaya çalışılır.

Örnekler:

Aşağıdaki ikinci dereceden denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

1. $3x^2 - 5x = 0$

2. $x^2 - x - 6 = 0$

3. $2x^2 + x - 1 = 0$

Çözüm 1:

$$3x^2 - 5x = 0$$
$$x\,.(3x - 5) = 0$$
$$x = \frac{5}{3} \text{ ve } x = 0$$

Çözüm 2:

$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$(x - 3).(x + 2) = 0$$
$$x - 3 = 0 \text{ ve } x + 2 = 0$$
$$x = 3 \qquad x = -2$$
$$\text{ÇK2} = \{-2\,, 3\}$$

Çözüm 3:

$$2x^2 + x - 1 = 0$$
$$(x + 1).(2x - 1) = 0$$
$$x = 0 \;\; V \;\; 3x - 5 = 0$$
$$x = -1 \quad \text{ve} \quad x = \frac{1}{2}$$
$$\text{ÇK3} = \{-1, \frac{1}{2}\}$$

b) Diskriminant Hesabı ile Kök Bulma:

İkinci dereceden denklemin genel görünümü; $ax^2 + bx + c = 0$ biçiminde verilir.
Bu denklem matematiksel olarak aşağıdaki adımlarla çözülür.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$$

; Eşitliğin her iki tarafı a'ya bölünür.

$$\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$$

Denklemin sol tarafına $\frac{b^2}{4a^2}$ terimi eklenir ve çıkarılır. Bu şekilde eşitlik bozulmamış olur. Sol tarafta yer değişimi yapılır.

$$\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

Payda eşitleme yapılır.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left[\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

$\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ Sağa geçirilip, karekök alınır.

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

x yalnız bırakılır.

Daha açık bir gösterimle denklemin kökleri;

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \rightarrow \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ve

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \rightarrow \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

formülleri ile elde edilir.

Örnek:

$2x^2 + 6x - 20 = 0$ denkleminin köklerini diskriminant hesabı ile bulunuz.

Çözüm:

$ax^2 + x + c = 0$ ifadesinde örneğimiz için $a = 2,\ b = 6,\ c = -20$'dir.

$\Delta = b^2 - 4ac$ formülünde yerine yazarsak $\Delta = 6^2 - 4(2)(-20) = 196$ bulunur.

Diskriminant yardımıyla kökler,

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \mp \sqrt{196}}{4}$$

$$x_1 = \frac{-6 + 14}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{-6 - 14}{4} = -5$$

olarak hesaplanır.

Örnek:

Dikdörtgen şeklindeki bir arsanın uzun kenarı 240 m kısa kenarı ise 160 m'dir. Arsa sahibi arsanın yüzeyini iki katına çıkarmayı hedeflemektedir. Bunun için uzun ve kısa kenarlarına eklenecek eşit arsa dilimlerinin miktarını belirleyiniz.

Çözüm:

Hem uzun kenara hem de kısa kenara eklenecek eşit arsa dilimi uzunluğu x metre olsun. Buna göre;

$$(160 + x)(240 + x) = 2 \cdot 160 \cdot 240$$

$$160.240 + 160x + 240x + x^2 = 2 \cdot 160 \cdot 240$$

$$x^2 + 400x - 38400 = 0$$

Çarpanlarına ayırma yöntemi ile denklemi çarpanlarına ayırabiliriz.

$$(x - 80)(x + 480) = 0$$

Bu durumda $x_1 = 80\ ve\ x_2 = -480$ olarak bulunur. Uzunluk negatif olamayacağından x=80 m' dir. Yani uzun ve kısa kenara 80 m' lik arsa dilimi eklendiğinde arsanın alanı iki katına çıkacaktır.

3.3.3 Rasyonel Denklemler

$P(x)$ ve $Q(x)$ birer polinom fonksiyon olmak üzere;

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad , \quad Q(x) \neq 0$$

biçimindeki denklemlere rasyonel (kesirli) denklem denir. Aşağıda birkaç rasyonel denklem verilmekte ve çözümleri yapılmaktadır.

Örnek:

Aşağıdaki rasyonel denklemi çözünüz.

$$\frac{2x + 7}{x + 3} - \frac{x - 1}{x - 5} = \frac{38}{2x - x^2 + 15}$$

Çözüm:

Rasyonel denklemlerin çözümünde toplama ve çıkarma işlemlerinde payda eşitleme işlemi yapılır.

$$\frac{(2x+7)(x-5)-(x-1)(x+3)}{(x+3)(x-5)}=\frac{-38}{x^2-2x-15}$$

$$\frac{2x^2-10x+7x-35-x^2-3x+x+3}{x^2-2x-15}=\frac{-38}{x^2-2x-15}$$

$$(x^2-2x-15)\frac{x^2-5x-32}{x^2-2x-15}=\frac{-38}{x^2-2x-15}(x^2-2x-15)$$

$$x^2-5x-32=-38$$
$$x^2-5x+6=0$$
$$(x-3)(x-2)=0$$
$$x-3=0 \Rightarrow x_1=3$$
$$x-2=0 \Rightarrow x_2=2$$
$$Ç.K.=\{2,3\}$$

Örnek:

$$\frac{27}{2x^2+7x-4}+\frac{2x}{(x+4)}=\frac{6}{(2x-1)}-1$$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

Çözüm:

$$\frac{27}{(2x-1)(x+4)}+\frac{2x}{(x+4)}=\frac{6}{(2x-1)}-1$$

Payda eşitleme işlemi yapılır;

$$\frac{27+4x^2-2x}{2x^2+7x-4}=\frac{6x+24}{2x^2+7x-4}-\frac{2x^2+7x-4}{2x^2+7x-4}$$
$$\frac{27+4x^2-2x}{2x^2+7x-4}=\frac{6x+24-2x^2-7x+4}{2x^2+7x-4}$$

Paydalar eşit olduğuna göre payların eşit olması gerektiğinden,

$$27+4x^2-2x=-2x^2-x+28$$
$$6x^2-x-1=0$$
$$(3x+1)(2x-1)=0$$
$$x=\frac{-1}{3} \quad \text{ve} \quad x=\frac{1}{2}$$

3.3.4 Köklü İfade İçeren Denklemler

İçerisinde kök bulunduran denklem tipidir. Aşağıda köklü ifade içeren denklem örnekleri verilmekte ve çözümü yapılmaktadır.

Örnek:

$\sqrt{4x^2+20}-2x=10$ denklemin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm:

$$\sqrt{4x^2+20}=2x+10$$

$$4x^2 + 20 = (2x + 10)^2$$
$$4x^2 + 20 = 4x^2 + 40x + 100$$
$$-40x = 80$$
$$x = -2$$

Buluna çözüm ilk verilen denklemde yerine konmalı ve denklemi sağladığı test edilmelidir.

Örnek:

$$\sqrt{x+6} - 4 = x$$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

Çözüm:

$$\sqrt{x+6} = x + 4$$

eşitliğinin sağlanması için,

$x + 6 \geq 0$ ve $x + 4 \geq 0$ olması gerekir. Yani $x \geq -4$ olmalıdır.

$$(\sqrt{x+6})^2 = (x+4)^2$$
$$x + 6 = x^2 + 8x + 16$$
$$x^2 + 7x + 10 = 0$$
$$(x+5)(x+2) = 0$$
$$x = -5 \quad \text{ve} \quad x = -2$$

sayıları bulunur. Ancak -5 çözümü yukarıda verilen eşitliği sağlamaz. Bu nedenle çözüm kümesi sadece -2 sayısından oluşur.

$$\text{Ç.K.} = \{-2\}$$

3.3.5 Üslü İfade İçeren Denklemler

Örnek:

$$3^{x^2+x-6} = 1$$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

Çözüm:

$$3^{x^2+x-6} = 3^0$$
$$x^2 + x - 6 = 0$$

olur.

$$(x+3)(x-2) = 0$$
$$x = -3 \quad \text{ve} \quad x = 2$$
$$Ç.K. = \{-3, 2\}$$

3.3.6 Mutlak Değer İçeren Denklemler

a bir reel sayı (R) olmak üzere;

$$|a| = \begin{cases} a & , \quad a \geq 0 \\ -a & , \quad a < 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $|a|$ sayısına a reel sayısının mutlak değeri denir.

$|\mathbf{a}| = \sqrt{a^2}$ ifadesine mutlak değerin cebirsel tanımı denir.

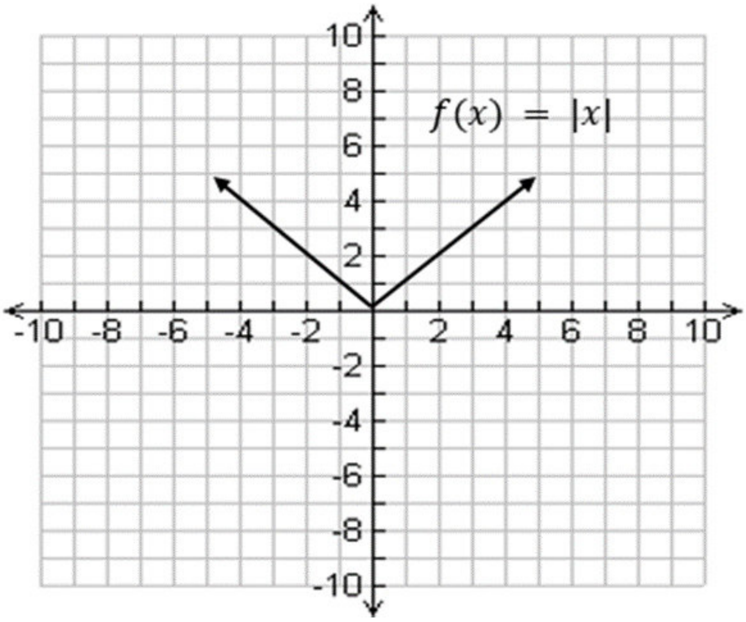
Örnek: $|-7| = 7$, $|7| = 7$

Örnek: $|x| = 4$ denklemini sağlayan iki sayı bulunur. Yani x yerine 4 veya -4 konduğunda bu sayıların mutlak değerleri 4 olur.

$x_1 = 4,\ x_2 = -4$

Mutlak değer fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir. Fonksiyonlar bölümünde ayrıntılı olarak anlatılacaktır.

$y = f(x) = |x|$



Şekil 3.9: Mutlak Değer Fonksiyonu

Örnek:

$|x - 3| = 4$ denklemini çözünüz.

Çözüm:

$x - 3 = 4 \rightarrow x_1 = 7,$

$x - 3 = -4 \rightarrow x_1 = -1$

3.3.7 Mutlak Değerin Özellikleri

$x\,, y \in R$ olmak üzere;

1)$|x| > 0$

2)$|-x| = |x|$

3)$|x^2| = |x|^2$

4)$|x.y| = |x|.|y|$

5) $-|x| \leq x \leq |x|$

6) $|\,|x| - |y|\,| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$

7)$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|\,x\,|}{|\,y\,|}$; $y \neq 0$

özellikler mevcuttur.

Mutlak değerli ifade içeren bir denklemi çözmek için yapılacak ilk işlem, gerçel sayılarda mutlak değer tanımını kullanarak mutlak değeri kaldırmaktır. Bunu şöyle açıklayabiliriz.

$n \in N^+$ (Çift sayı olan dereceden kök)

$$\sqrt[2n]{[f(x)]^{2n}} = |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| = \begin{cases} f(x) & ; f(x) \geq 0 \\ -f(x) & ; \ f(x) < 0 \end{cases}$$

Örnek:

$x^2 - |x| - 2 = 0$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

Çözüm:

$$x \leq 0 \ \Rightarrow \ |x| = -x$$
$$x^2 - |x| - 2 = 0$$
$$x^2 - (-x) - 2 = 0$$
$$x^2 + x - 2 = 0$$
$$(x+2).(x-1) = 0$$
$$x = -2 \qquad x = 1$$
$$ÇK = \{-2\}$$

İkincisi;

$$x \geq 0 \rightarrow |x| = x$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x-2)(x+1) = 0$$
$$x = 2 \ \text{ ve } \ x = -1$$
$$ÇK2 = \{2\}$$

Denklemin çözüm kümesi ise $Ç.K. = Ç.K._1 \cup Ç.K._2$'dir.

Buradan

$$Ç.K. = \{-2, 2\}$$

bulunur.

3.4 Eşitsizlikler

İki nicelik arasındaki büyüklük ya da küçüklük ilişkisinin matematiksel ifadesine eşitsizlik denir. Denklemin çözümü bir nokta olurken, eşitsizliklerin çözümü ise bir nokta da olabilirken noktalar kümesi yani sayı ekseni üzerinde bir aralık gösterir.

(Sol Taraf) $\gtreqless$ (Sağ taraf)

Örnek:

$$4x^2 + 5x - 8 \geq 0$$
$$x + y < 8$$

gibi.

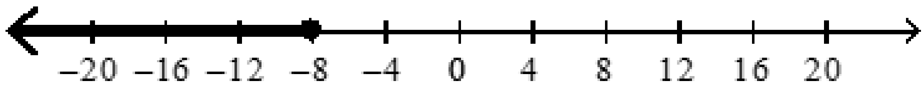
3.5 Birinci Dereceden Eşitsizlikler

Bilinmeyenin derecesinin (üssünün) bir olduğu eşitsizliklerdir. Doğrusal eşitsizlikler olarak da adlandırılmaktadırlar. Doğrusal bir eşitsizliğin, örneğin $5(x+2) > 20$, çözülmesiyle 2 fazlasının 5 katı 20'den büyük olan sayılar bulunmuş olur. Bilinenler bir tarafa, bilinmeyenler bir tarafa toplanarak kolay bir şekilde çözümlenebilmektedirler. Doğrusal eşitsizliklerin çözüm kümeleri değişkenin özelliğine göre kesikli ya da sürekli olabilmektedir.

Örnek:
$x - 1 \leq -9$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?
Çözüm:

$$x - 1 \leq -9$$
$$x - 1 + 1 \leq -9 + 1$$
$$x \leq -8$$

Eşitsizliğin çözüm aralığı -8 ve -8'den küçük reel sayılardır. Görüldüğü gibi eşitsizliklerin çözümü bazen bir sayı bazen de bir sayı aralığı olabilmektedir. Bu aralık sayı ekseni üzerinde aşağıdaki gibi gösterilir.



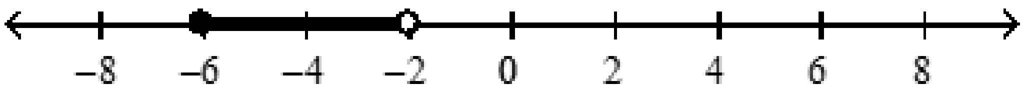
Örnek:
$-15 \leq 2x - 3 \leq -7$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?
Çözüm:

$$-15 \leq 2x - 3 \leq -7$$

x' yalnız bırakmak için her ifadeye 3 sayısı eklenir, daha sonra 2' ye bölünür.

$$-15 + 3 \leq 2x - 3 + 3 \leq -7 + 3$$
$$-12 \leq 2x \leq -4$$
$$\frac{-12}{2} \leq \frac{2x}{2} \leq \frac{-4}{2}$$
$$-6 \leq x \leq -2$$

Eşitsizliğin çözüm aralığı -6 ile -2 aralığındaki reel sayılardır. Bu aralık sayı ekseni üzerinde aşağıdaki gibi gösterilir.



Eşitsizlikler ile ilgili kurallar:
1) Eşitsizliğin her iki tarafına da aynı ifade eklenip çıkarılabilir.
2) Eşitsizliğin her iki tarafı aynı pozitif ifade ile çarpılıp veya bölündüğünde eşitsizlik yön değiştirmez.
3) Eşitsizliğin her iki tarafı aynı negatif ifade ile çarpılıp veya bölündüğünde eşitsizlik yön değiştirir.
4) Eşitsizliğin her iki yanı pozitif işaretli ise her iki tarafın da pozitif kuvveti alındığında eşitsizlik aynen korunur.
5) Eşitsizliğin her iki yanı da aynı işaretli olmak koşuluyla her iki yanın negatif kuvveti alındığında eşitsizlik yön değiştirir.

3.6 İkinci Dereceden Eşitsizlikler

$$ax^2 + bx + c \neq 0$$
$$ax^2 + bx + c > 0$$
$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

$$ax^2 + bx + c < 0$$
$$ax^2 + bx + c \leq 0$$
biçimindeki eşitsizliklere ikinci dereceden eşitsizlikler denir. İkinci dereceden eşitsizliklerin çözümünde de ikinci dereceden denklemlere benzer şekilde diskriminant ($\Delta = b^2 - 4ac$) hesaplanır ve diskriminantın işaretine göre eşitsizliğin işareti belirlenir.

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin köklerinin durumu incelenir ve işaret tablosu yardımıyla eşitsizliğin işareti belirlenir. Bilindiği gibi aşağıdaki üç durum söz konusudur:

a. $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ise x_1 ve x_2 gibi birbirinden farklı iki farklı reel kök vardır.

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
ax^2+bx+c	a ile aynı işarette		a' nın işaretinin tersi		a ile aynı işarette

b. $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ise $x_1 = x_2$ şeklinde çakışık iki kök vardır.

x	$-\infty$	$x_1 = x_2$	$+\infty$
ax^2+bx+c	a ile aynı işarette		a ile aynı işarette

c. $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ise $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin reel kökü yoktur.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
ax^2+bx+c	a ile aynı işarette

Örnek:
$x^2 - 2x + 1 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?
Çözüm:
$$x^2 - 2x + 1 < 0$$
$$x^2 - 2x + 1 = 0$$
ise
$$(x-1)(x-1) = 0$$
$x = 1$'de çift katlı kök bulunmaktadır. İşaret tablosunu yapalım:
$a = 1 > 0$ (+) işaretli

x	$-\infty$	$x_1 = x_2 = 1$	$+\infty$
$x^2 - 2x + 1$	$+$		$+$

Tam kare ifade olduğundan tüm reel sayılar kümesi için pozitif değer alacaktır. Bu durumda eşitsizliğin çözümü yoktur yani $Ç.K. = \emptyset$' dir.

Örnek:
$-2x^2 + 5x - 3 \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.
Çözüm:
$$-2x^2 + 5x - 3 \geq 0$$
$$-2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$(-2x+3)(x-1)=0$$
$$-2x+3=0 \text{ ve } x-1=0$$

Kökler; $x_1 = 3/2$ ve $x_2 = 1$ dir ve eşitsizliğin baş katsayısı $a = -2 < 0$ yani işaret tablosunda ilk olarak negatif işaret ile başlanacaktır.

x	$-\infty$	1	$3/2$	$+\infty$
$-2x^2 + 5x - 3$	$-$	$+$	$-$	

Eşitsizliğe bakılırsa pozitif olan bölge arandığı için çözüm kümesi:

$$Ç.K = (1\,, 3/2)\text{dir.}$$

3.7 Rasyonel Eşitsizlikler

Örnek: Aşağıdaki denklem sisteminin ortak çözüm kümesi nedir?

$$\frac{2x-3}{x+7} > 0$$
$$\frac{x+5}{x-6} < 0$$

Çözüm:

$$\frac{2x-3}{x+7} > 0 \quad \text{için;}$$

$2x - 3 = 0$ ise $x = -\frac{3}{2}$

$x + 7 = 0$ ise $x = -7$

$$\frac{x+5}{x-6} < 0 \text{ için;}$$

$x + 5 = 0$ ise $x = -5$

$x - 6 = 0$ ise $x = 6$

Her iki eşitsizlik için birlikte işaret tablosu yapalım:

x	$-\infty$	-7	-5	$-3/2$	6	∞
$\frac{2x-3}{x+7}$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	
$\frac{x+5}{x-6}$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	

$$\frac{2x-3}{x+7} > 0 \quad \text{ve} \quad \frac{x+5}{x-6} < 0$$

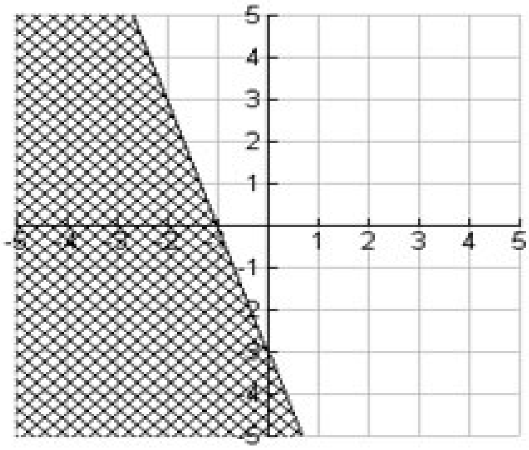
olduğu aralık $(-3/2, 6)$ açık aralığıdır. Bu durumda eşitsizlik sisteminin ortak çözüm kümesi;

$$\text{Ç.K.} = (-3/2, 6)\text{dır.}$$

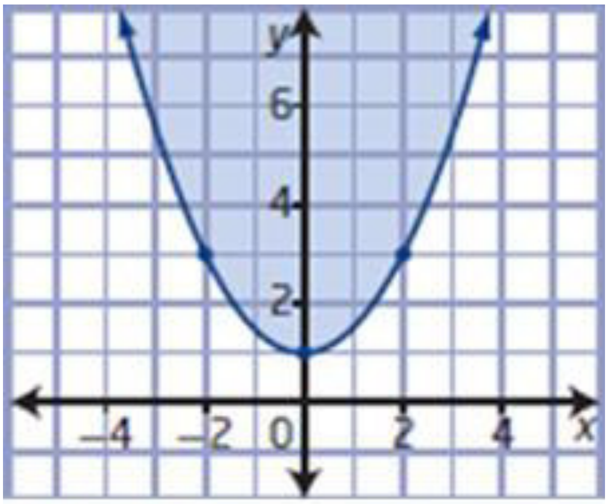
Uygulama

İki Değişkeni olan eşitsizlikler

1) $y \leq -3x - 3$ eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdaki gibidir. $y = -3x - 3$ doğrusunun solunda kalan taralı bölgedeki tüm noktalar bu eşitsizliği sağlarlar.



2) $y \geq x^2 + 1$ eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdaki gibidir. $y = x^2 + 1$ parabolünün üzerinde kalan taralı bölgedeki tüm noktalar bu eşitsizliği sağlarlar.



Uygulama Soruları

1)

$$-2x + 6 > 2$$
$$-2x + 6 - 6 > 2 - 6$$
$$-2x > -4$$
$$\frac{-2x}{-2} < \frac{-4}{-2}$$

-2'ye bölündüğü için eşitsizlik işaret değiştirir. Çözüm aşağıdaki gibidir.

$$x < 2$$

2)

$$2(3x - 5) < 4x - 6$$
$$6x - 10 < 4x - 6$$

Eşitsizliğin iki tarafında x'li terim varsa bir tarafındaki yok edilir, her iki taraftan 4x çıkarılır.

$$6x - 4x - 10 < 4x - 4x - 6$$
$$2x - 10 < -6$$

Her iki tarafa 10 eklenir.

$$2x - 10 + 10 < -6 + 10$$
$$2x \leq 4$$

Her iki taraf 2 ye bölünür.

$$\frac{2x}{2} < \frac{4}{2}$$
$$x < 2$$

3)

$$2(3x - 5) < 4x - 6$$
$$6x - 10 < 4x - 6$$

Eşitsizliğin iki tarafında x'li terim varsa bir tarafındaki yok edilir, her iki taraftan 4x çıkarılır.

$$6x - 4x - 10 < 4x - 4x - 6$$
$$2x - 10 < -6$$

Her iki tarafa 10 eklenir.

$$2x - 10 + 10 < -6 + 10$$
$$2x \leq 4$$

Her iki taraf 2'ye bölünür.

$$\frac{2x}{2} < \frac{4}{2}$$
$$x < 2$$

4)

$$\frac{2x - 7}{4} + \frac{x - 3}{2} < \frac{10}{6}$$

Önce payda eşitlenir. 4,2 ve 6 sayılarının en küçük ortak katı 12 olduğu için ilk terim 3 ile, ikinci terim 6 ile ve sağdaki terim 2 ile çarpılır.

$$\frac{(2x - 7)}{4} \cdot \frac{3}{3} + \frac{(x - 3)}{2} \cdot \frac{6}{6} < \frac{10}{6} \cdot \frac{2}{2}$$

$$\frac{6x-21}{12}+\frac{6x-18}{12}<\frac{20}{12}$$

$$\frac{6x-21+6x-18}{12}<\frac{20}{12}$$

$$\frac{12x-39}{12}<\frac{20}{12}$$

Paydalar eşitlendiğine göre, her iki tarafı 12 ile çarpılır.

$$12\cdot\frac{12x-39}{12}<\frac{20}{12}\cdot 12$$

$$12x-39<20$$

$$12x<20+39$$

$$x<\frac{59}{12}$$

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde, denklem ve eşitsizlik tanımları verilmiştir. Doğrusal, ikinci dereceden denklem, rasyonel denklem, üstel denklem ifadeleri anlatılmıştır. İkinci kısımda eşitsizlikler üzerinde ayrıntılı olarak durulmuştur. Ayrıca denklem ve eşitsizliklerin işletme uygulamaları gerçekleştirilmiştir.

Bölüm Soruları

1) 34 yaşındaki babanın yaşı, oğlunun yaşının 5 katından 6 eksik ise oğlunun yaşı kaçtır?
a) 28
b) 27
c) 17
d) 16
e) 8

2) $(3x-5)-(1-2x)=14$ denkleminin çözümü aşağıdakilerden hangisidir?
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

3) Aşağıda verilen denkleminin çözüm kümesi hangisidir?

$$\frac{x}{3}+\frac{12}{x}=5$$

a) $\{3\}$
b) $\{12\}$
c) $\{3, 12\}$
d) $\{4\}$
e) $\emptyset$

4) $\sqrt{x-3}=x-3$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
a) $\{0, 1\}$
b) $\{4, 3\}$
c) $\{1, 4\}$
d) $\{0, 3\}$
e) $\emptyset$

5) $x^2-6x=-9$ denkleminin çözümü aşağıdakilerden hangisidir?
a) -3
b) -2
c) 2
d) 3
e) $\emptyset$

6) $x^2+5=-4$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
a) $\{-3\}$
b) $\{3\}$
c) $\{-3, 3\}$
d) $\{9\}$

e) $\emptyset$

7) $3x^2 + 5x - 2 = 0$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
a) $\{-2,\ 1/3\}$
b) $\{-2\}$
c) $\{1/3\}$
d) {-2,0}
e) $\emptyset$

8) $2(4x + 7) \geq 7(x + 3)$ eşitsizliğinin çözüm aralığı nedir?
a) $(-\infty, -7)$
b) $(-\infty, 7)$
c) $(0, 7]$
d) $[7, \infty)$
e) $(-\infty, \infty)$

9) $x^2 - 13x + 36 \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
a) $(-\infty,\ \infty)$
b) $(-\infty, 4)$
c) $[4, 9]$
d) $(-\infty, 4) \cup (9, \infty)$
e) $\emptyset$

10) Bir ürünün arz denklemi $p = 2q - 15$ ve talep denklemi $p = -5q + 48$ ise pazar denge noktası aşağıdakilerden hangisidir. Doğru denklemlerinin eşitliği (doğruların kesişim noktası)?
a) $(9, 0)$
b) $(0, 3)$
c) $(3, 7)$
d) $(9,\ 3)$
e) $(3, 12)$

Cevaplar

1) e, 2) d, 3) c, 4) b, 5) d, 6) e, 7) a, 8) d, 9) c, 10) d

4. BAĞINTI VE FONKSİYONLAR

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

4.1. Fonksiyon Tanımı
4.2. Fonksiyon Türleri
4.3. Fonksiyonla İşlemler
4.4. Bileşke Fonksiyon
4.5. Bir Fonksiyonun Tersi
4.6. Parçalı Fonksiyon

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1) Bağıntı ile fonksiyon arasındaki fark nedir?

2) Arz ve talep fonksiyonları nasıl belirlenir?

3) Gelir, gider ve kâr fonksiyonları nasıl oluşturulur?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	**Kazanım**	**Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği**
Bağıntı ve Fonksiyon	Tanımları bilmek, farkı anlamak	Okuyarak, fikir yürüterek
Fonksiyon Türleri	Fonksiyon türlerini anlamak	Okuyarak, fikir yürüterek
Fonksiyonla İşlemler	Fonksiyonlarla ilgili matematiksel işlemler yapabilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, uygulama yaparak
Bileşke ve Ters fonksiyon	Fonksiyonların bileşkesini bulabilmek ve bir fonksiyonun tersi var ise alabilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, uygulama yapma, örnek problem çözmek

Anahtar Kavramlar

- Birebir Fonksiyon
- Örten Fonksiyon
- İçine Fonksiyon
- Birim ve Sabit Fonksiyon
- Bileşke Fonksiyon
- Ters Fonksiyon

Giriş

Fonksiyon kavramı matematikte en önemli ve temel konulardan biridir. Fonksiyonlar, matematikteki çoğu kavramın tanımlanmasında ve kavramlar arası geçişin sağlanmasında birleştirici bir rol oynar. Nicelikler arasındaki ilişkileri ele alan fonksiyonel düşünme olmadan matematiği anlamanın ve değerini bilmenin mümkün olamayacağı belirlenmiştir.

Fonksiyonu daha iyi kavrayabilmek için aşağıdaki örneği dikkatle inceleyelim.

Örnek:

Fiyatı 5 TL olan kalemden x tane aldığımızda ödeyeceğimiz paraya y dersek;

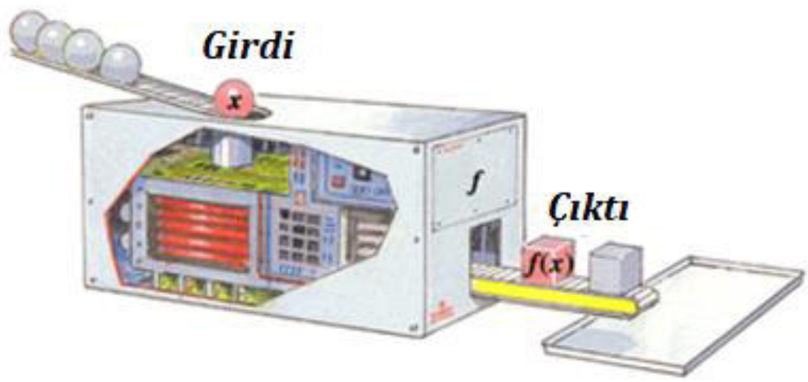
$$f(x) = y = 5x$$

olarak yazılır. Burada ödeyeceğimiz paranın aldığımız kalem miktarına bağlı olduğu açıktır. Satın alınan kalem miktarı değiştikçe ödenecek para da değişecektir. İşte bu durumda "ödenecek para alınan kalem miktarının (sayısının) bir fonksiyonudur" denilir.

Örneğin, bankada vadeli mevduat hesabına yatırılan bir miktar paranın belli bir zaman geçtikten sonraki değeri; yatırılan para miktarına, o zaman içinde geçerli olan faiz oranına ve geçen zamana göre değişecektir. Dolayısıyla paranın gelecekteki değeri; bu üç değişkene bağlıdır veya paranın gelecekteki değeri; yatırılan para miktarı, faiz oranı ve geçen sürenin bir fonksiyonudur denir. Burada paranın gelecekteki değeri olan S bağımlı değişken; yatırım miktarı P, faiz oranı i ve geçen zaman t ise bağımsız değişkenlerdir. Bu fonksiyon üç değişkenli bir fonksiyondur.

$$S = f(P, i, t)$$

Bir fonksiyonun bağımsız değişkenleri, fonksiyonun tanım kümesini, bağımlı değişkeni ise değer kümesini oluşturur. Bağımsız değişken sayısı tek ise tek değişkenli, birden fazla ise çok değişkenli fonksiyon oluşur. Bu bölümde tek değişkenli $[f(x)]$ fonksiyonlar üzerinde durulacaktır.



4.1 Bağıntı Nedir?

A ve B herhangi boş olmayan iki küme olsun.

Tanım Kümesi $\rightarrow A = \{1,2,3\}$

ve

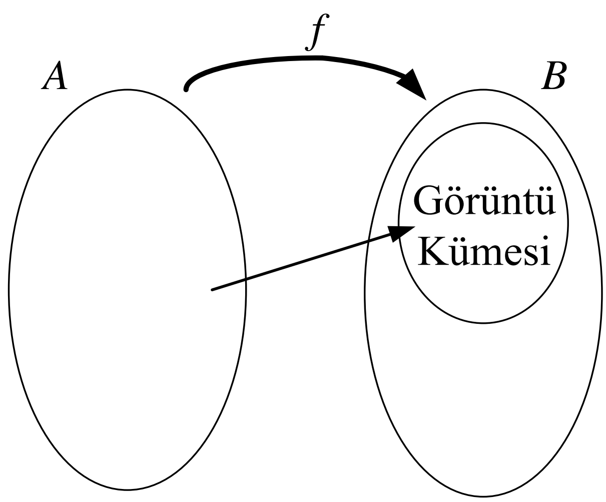
Değer Kümesi $\rightarrow B = \{a, b, c\}$

olsun. Bu iki küme kullanılarak oluşturulan kartezyen çarpım kümesi aşağıdaki gibi olur.

$$A \times B = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c),(3,a),(3,b),(3,c)\}$$
$$\beta = \{(x,y) : (x,y) \in A \times B\}$$
$A \times B$ kümesinin tüm alt kümeleri A'dan B'ye bir bağıntı oluşturur. $\beta = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$ gibi yazılan bir ifade A'dan B'ye bir bağıntı denir. Bir bağıntının fonksiyon olabilmesi için A tanım kümesinin bütün elemanları tanımlanmış olmalıdır. A kümesinin bütün elemaları Değer kümesi B'den yalnız ve yalnız bir elemanla eşleşmalidir. $A \times B$ iki küme olsun. Bu iki kümenin elemanlarından kartezyen çarpım kümesini oluşturalım.
$s(A) = m$ ve $s(B) = n$ ise,
A'dan B'ye $2m.n$ tane bağıntı tanımlanabilir.
$A \times A$'nın herhangi bir alt kümesine A'dan A'ya bağıntı ya da A'da bağıntı denir.
s(A) = m ve s(B) = n olmak üzere,
Örnek:
$A = \{a,b,c,d\}$ ve $B = \{1,2\}$ kümeleri için A'dan B'ye üç bağıntı yazınız.
Çözüm: A x B= {(a,1), (a, 2),(b,1), (b, 2), (c,1), (c, 2), (d, 1), (d, 2) } kartezyen çarpım kümesinin her bir alt kümesi A'dan B'ye bir bağıntıdır. Bu bağıntılardan üç tanesini yazarsak,
$$\beta_1 = \{(a,1),(a,2),(c,2),(d,1)\}$$
$$\beta_2 = \{(c,2)\}$$
$$\beta_3 = \{(d,1),(c,2)\}$$

4.2 Fonksiyon Tanımı

A ve B boş olmayan kümeler olmak üzere, A kümesinin her elemanını, B kümesinin yalnız ve yalnız bir elemanına eşleyen bağıntıya **fonksiyon** denir. A kümesinin tüm elemanlarını temsil eden değişken x, eşlendiği değerleri kapsayan B kümesinin elemanlarını temsil eden değişken de y olarak tanımlanırsa, A kümesinden B kümesine tanımlanan fonksiyon $y = f(x)$ şeklinde gösterilir.
A kümesi f fonksiyonunun "Tanım Kümesi ($T.K.$)",
B kümesi ise f fonksiyonunun "Değer Kümesi" ($D.K.$),
A kümesinin tüm elemanlarının, f fonksiyonuna göre, B kümesinde eşlendiği elemanların oluşturduğu kümeye ise "Görüntü Kümesi ($G.K.$)" denir.



Şekil 4.1: Fonksiyon Tanımı

$A = \{ a , b , c \}$ ve $B = \{ 1 , 2 , 3 \}$ kümeleri verilmiş olsun. A'dan B'ye tanımlanmış olan f bağıntısının fonksiyon olabilmesi için,

A'daki her elemanın f altında bir görüntüsü olmalı,

A'daki her elemanın f altında bir ve yalnız bir tek görüntüsü olmalıdır.

Örneğin, $f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 3$ olarak tanımlanan bir f bağıntısı A'dan B'ye bir fonksiyon oluşturmaktadır. Çünkü A kümesinin bütün elemanlarının f altında bir görüntüsü bulunmakta ve A kümesinin her elemanı B kümesinin bir ve yalnız bir elemanı ile eşleşmektedir.

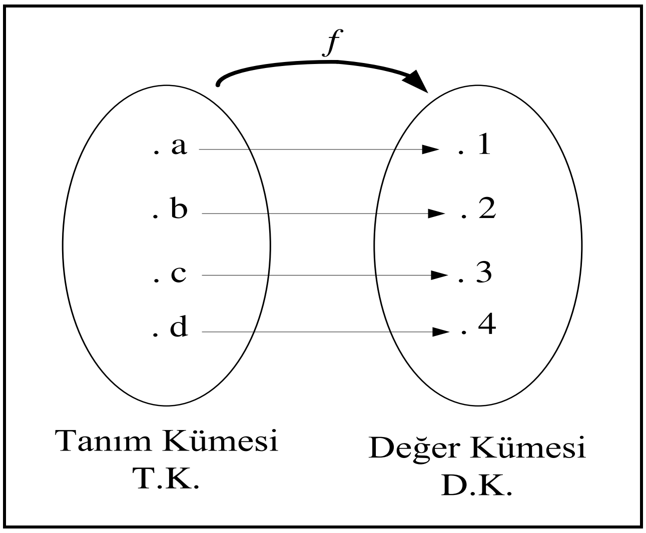
Bu iki kümenin elemanlarından kartezyen çarpım kümesini oluşturalım.

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 2), (c, 3)\}$$

$\beta_1 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$ bağıntısı A'dan B'ye bir fonksiyon oluşturur.

$\beta_2 = \{(a, 1), (b, 2), (b, 3)\}$ bağıntısı A'dan B'ye bir fonksiyon oluşturmaz. A kümesindeki c tanımlı değildir.

$\beta_3 = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (c, 2)\}$ bağıntısı A'dan B'ye bir fonksiyon oluşturmaz. A kümesindeki a elemanı B kümesinden birden fazla elemanla eşleşmiştir.



Şekil 4.2: Birebir Fonksiyon

Örnek:

$y = f(x)$	
x	y
-2	2
0	6
2	4
4	4
6	0

Örnek:

$y = 2 - \sqrt{3 - 2x}$ fonksiyonunun tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

Çözüm:

Kök içerisinde ancak ve ancak 0 veya pozitif reel sayılar olmalıdır. Negatif sayı olmamalıdır. Bu nedenle kök içerisindeki ifade ≥ 0 yazılarak tanım kümesi elde edilir.

$$3 - 2x \geq 0$$
$$x \leq \frac{3}{2}$$

Örnek:

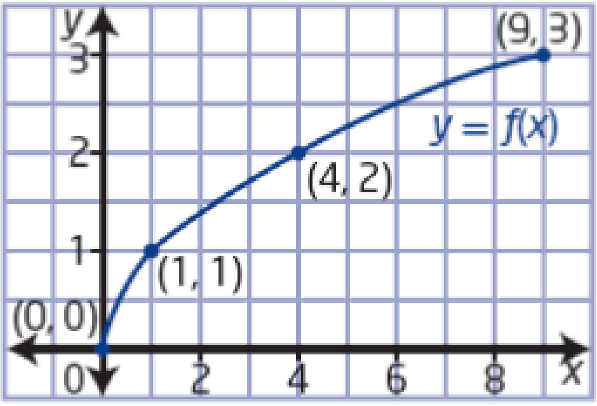
$$f(x) = \frac{3}{-0{,}5.(x - 4)} - 1$$

Yukarıda verilen fonksiyonda $f(6)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

$$-4$$

Örnek:

Aşağıda grafiği verilen fonksiyonda $f(0), f(1), f(4)$ ve $f(9)$ kaçtır?



Çözüm:

$$f(0) = 0$$
$$f(1) = 1$$
$$f(4) = 2$$
$$f(9) = 3$$

Örnek:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$f : A \rightarrow B$

$f(x) = y = 2x + 1$ ise $[f(B)]$ görüntü kümesi nedir?

Çözüm:

$$f(1) = 2.1. + 1 = 3$$
$$f(2) = 2.2 + 1 = 5$$
$$f(3) = 2.3 + 1 = 7$$
$$f(4) = 2.4 + 1 = 9$$
$$f(B) = y = \{3, 5, 7, 9\}$$

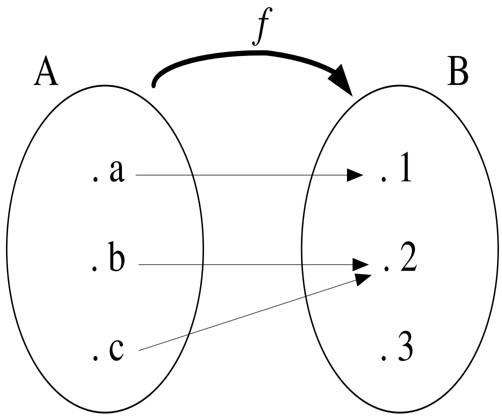
Örnek:

$$f(x) = 5x + 2$$
$$f(-2) = 5(-2) + 2 = -8$$
$$f(-1) = 5(-1) + 2 = -3$$
$$f(0) = 5(0) + 2 = 2$$
$$f(1) = 5(1) + 2 = 7$$
$$f(2) = 5(2) + 2 = 12$$

4.3 Fonksiyon Türleri

4.3.1 İçine Fonksiyon

$f : A \rightarrow B$ fonksiyonunda $f(A) \neq B$ ise, yani B tanım kümesinde boş elemanlar kalıyorsa f içine fonksiyondur.

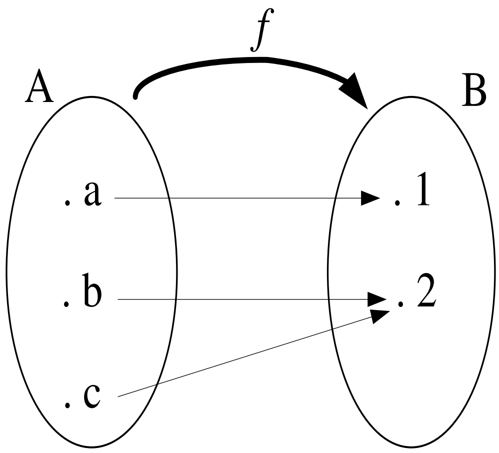


(B değer kümesinde boş elemanlar kalıyor)

Şekil 4.3: İçine Fonksiyon

4.3.2 Örten Fonksiyon

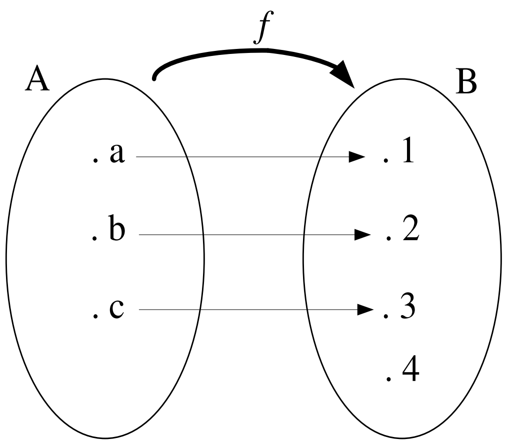
$f : A \rightarrow B$ fonksiyonunda B değer kümesinde eşlenmeyen (boşta) eleman kalmıyorsa f fonksiyonu örten fonksiyondur.



Şekil 4.4: Örten fonksiyon

4.3.3 Bire-Bir Fonksiyon

$f : A \rightarrow B$ fonksiyonu için, A tanım kümesinin farklı elemanlarının görüntüleri daima farklı ise f fonksiyonuna "bire-bir fonksiyon" denir.



Şekil 4.5: $f\,:\,A \rightarrow B$ Bire-Bir Fonksiyon

Not: Grafiği verilen bir fonksiyonun bire-bir olup olmadığını anlamak için, y eksenine paralel doğrular çizilir. Bu doğrular grafiği birden fazla noktada kesiyorsa fonksiyon bire-bir değildir.

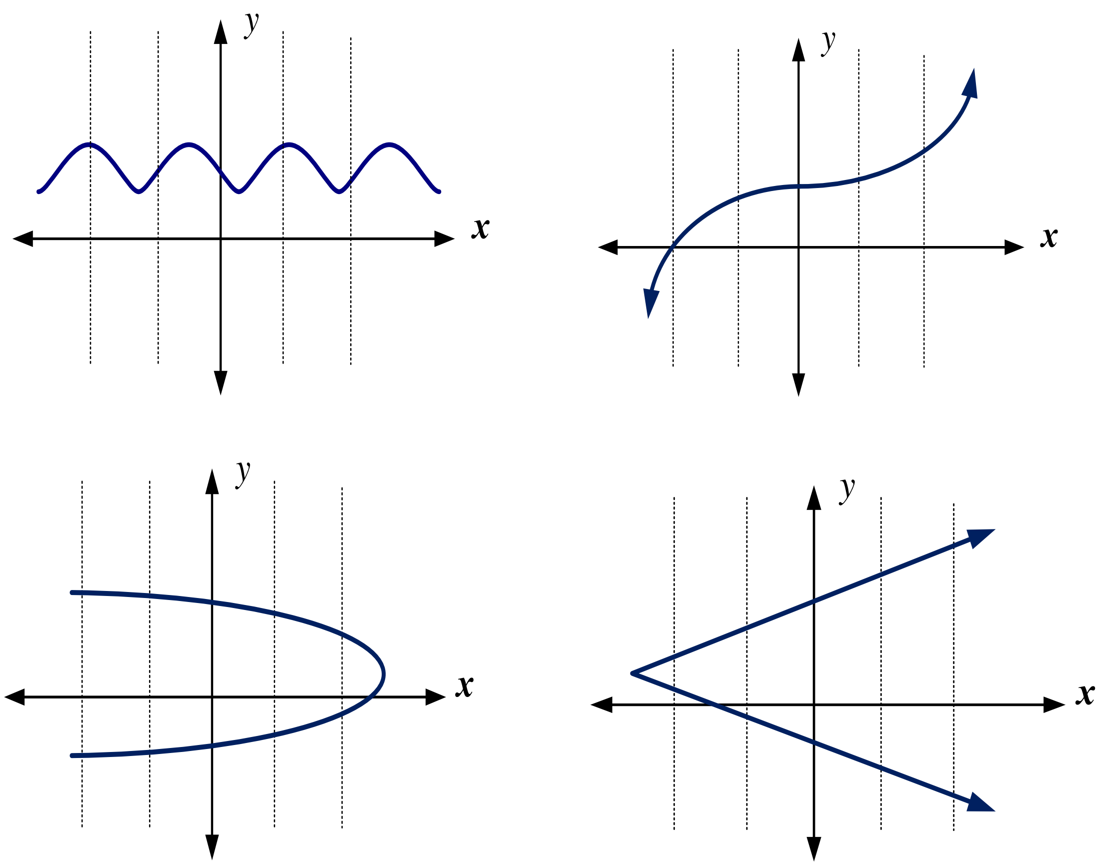
Örnek:

$f(x) = \{(1,5), (2,10), (3,15), (4,20), (5,25)\}$ Birebir fonksiyon

$g(x) = \{(1,5), (2,5), (3,10), (4,10), (5,15)\}$ Birebir değil

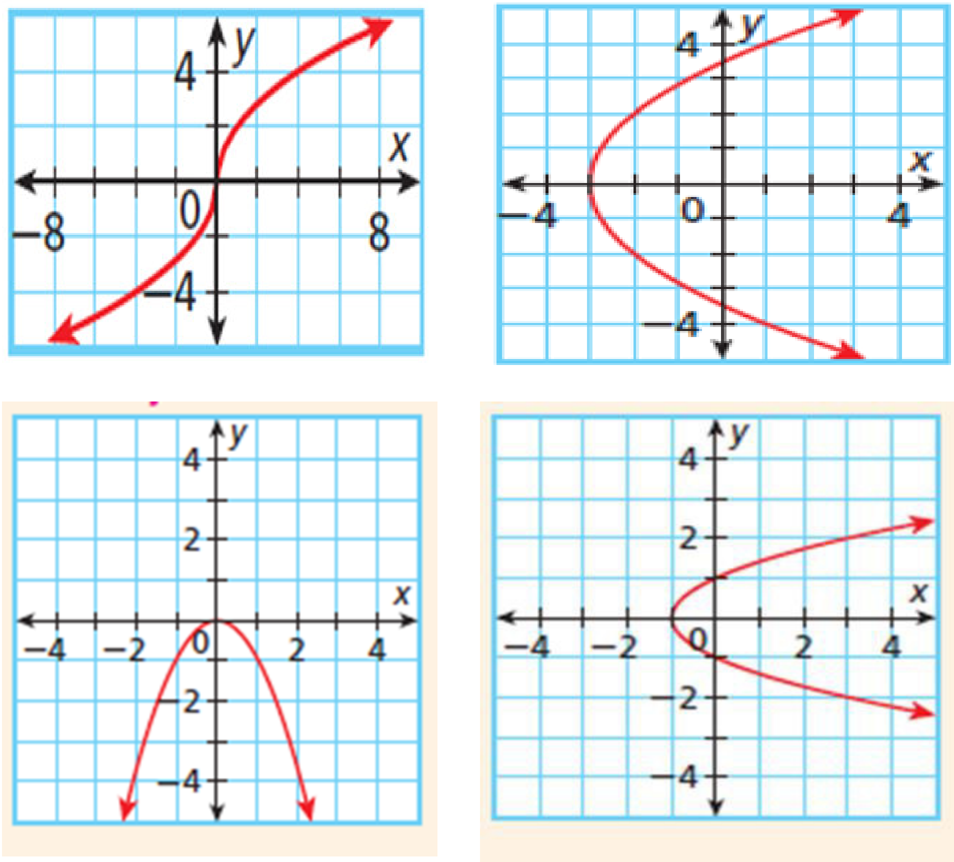
Örnek:

Aşağıda verilen grafiklerin ilk ikisi fonksiyon altta kalan diğer ikisi ise fonksiyon değildirler.

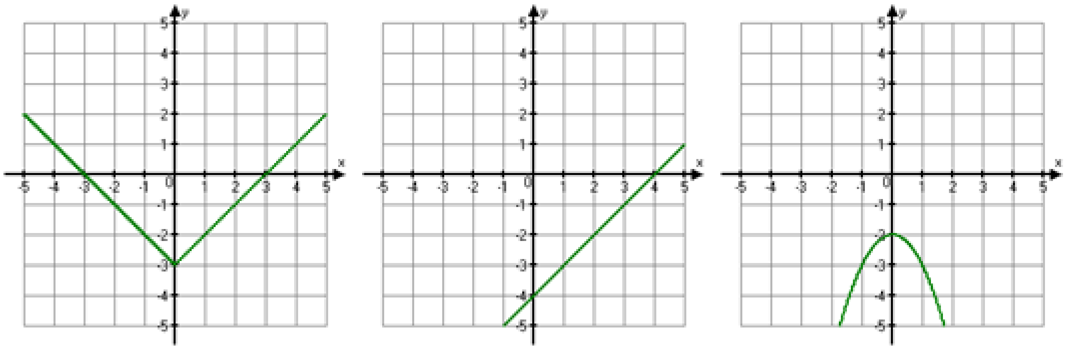


Şekil **4.6**: Fonksiyon Tanımına Uygun Olup Olmama

Aşağıda verilen fonksiyonlardan sol taraftakiler fonksiyon tanımına uyarlar, sağ taraftakiler ise fonksiyon değildirler.



Aşağıda üç farklı fonksiyonun çizimi verilmiştir. Her üçü de fonksiyon tanımına uyarlar. Birincisi mutlak değer fonksiyonu, İkincisi doğrussal fonksiyon, üçüncüsü ise kuadratik fonksiyondur. Bu fonksiyonlar sonraki ünitelerde ayrıntılı olarak incelenecektir. Bu fonksiyonlardan sadece ikincisi (doğrusal fonksiyon) birebir fonksiyondur.

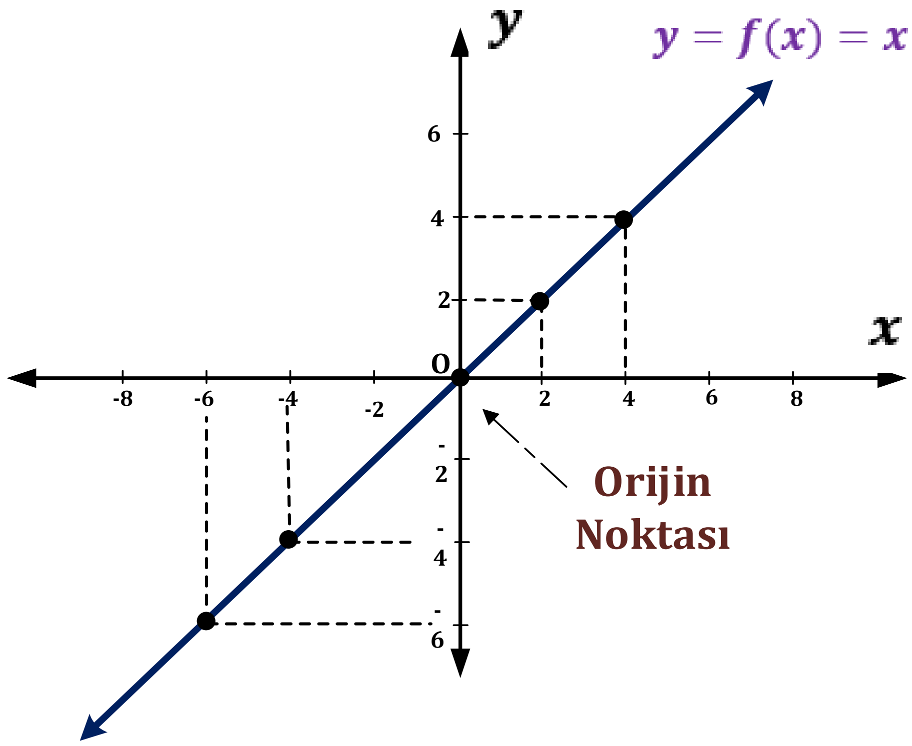


4.3.4 Birim Fonksiyon

$f : A \to A$ fonksiyonunda, f fonksiyonunu A kümesinin her elemanını tekrar kendisine eşliyorsa f fonksiyonuna "birim fonksiyon" denir.
Birim fonksiyon "I" (identity function) ile gösterilir.

$$y = f(x) = x$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\big(f(x)\big) = x \ \ and \ (f \circ f^{-1})(x) = f\big(f^{-1}(x)\big) = x$$

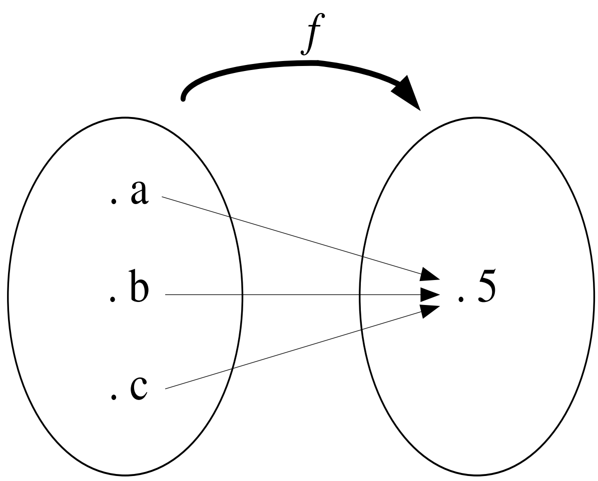


Şekil 4.7: Birim Fonksiyonun Grafiği

Yukarıdaki grafikte de görüldüğü gibi, tanım kümesindeki her eleman değer kümesinde yine kendine eşlenmiştir. O hâlde, $y = x$ doğrusu birim fonksiyonun grafiğidir.
Birim fonksiyonun tanım kümesi değer kümesine eşittir.
$f(x)$ birim fonksiyon ise, $f\ (x) = y = x$

4.3.5 Sabit Fonksiyon

$f : A \rightarrow B$ fonksiyonu için, A kümesinin bütün elemanlar, B kümesinin sadece bir elemanı ile eşleniyorsa, f fonksiyonu "sabit fonksiyon" dur.



Şekil 4.8: Sabit Fonksiyon

4.4 Fonksiyonlarla Dört İşlem

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
- $(f \,.\, g)(x) = f(x) \,.\, g(x)$
- $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$; $(g(x) \neq 0)$
- $k \in R$ olmak üzere ; $(k.f)(x) = k.f(x)$

Örnek:

$$f(x) = 2 - x \quad ; \quad g(x) = 3 + 3x$$
$$(f + g)(x) = 2 - x + 3 + 3x$$
$$(f + g)(x) = 2x + 5$$

Çözüm:

$$(f + g)x = f(x) + g(x)$$
$$(f + g)x = 3x + 1 + x^2 + 2$$
$$(f + g)x = x^2 + 3x + 3$$

Örnek:

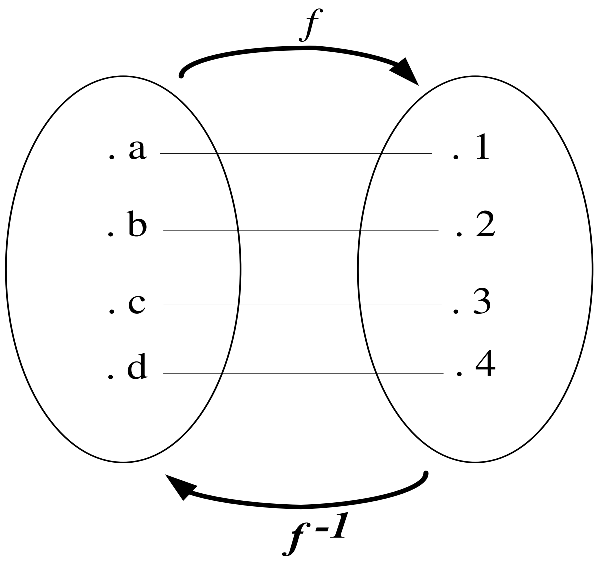
$$f(x) = 2x - 1$$
$$g(x) = 3x + 2$$
$$(f.g)(2) + (2f + 3)(-2) = ?$$

Çözüm:

$$= f(2).g(2) + 2f(-2) + 3$$
$$= 3.8 + (-10) + 3$$
$$= 24 - 7$$
$$= 17$$
$$f(2) = 2.2 - 1$$
$$= 3$$
$$g(2) = 3.2 + 2$$
$$= 8$$
$$2f(-2) = (2.-2 - 1).2$$
$$= -10$$

4.4.1 Bir Fonksiyonun Tersi

f fonksiyonu A'dan B'ye bire-bir örten bir fonksiyon ise; (f^{-1}) fonksiyonuna ***f*'nin ters fonksiyonu** denir.



Şekil 4.9: Ters Fonksiyonun Gösterimi

Bir fonksiyonun tersinin bulunuşu:

Bir fonksiyonun tersi bulunurken, x yerine y, y yerine x yazılır. Oluşan denklemden y çekilir. Bulunan y fonksiyonun tersidir. ($f(x) = y$)

Örnek:

$f : R \rightarrow R$ ye olmak üzere;

$$f(x) = \frac{2x + 3}{6}$$

fonksiyonunun tersi nedir?

Çözüm:

$f(x)$ yerine y yazılır.

$$f\,(x) = \frac{2x+3}{6} \quad \rightarrow \quad y = \frac{2x+3}{6}$$

Bulunan eşitlikte x yerine y, y yerine x yazılır, y yalnız bırakılır.

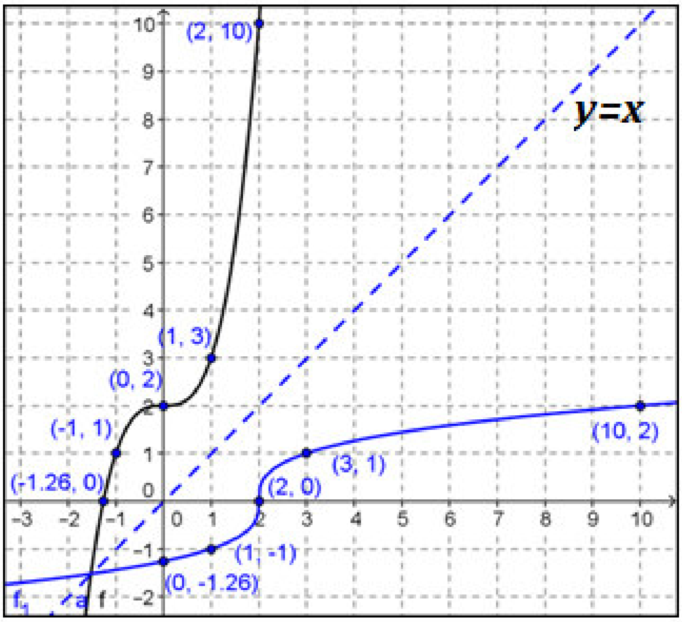
$$x = \frac{2y+3}{6}$$

$$6x = 2y+3$$

$$6x-3 = 2y$$

$$y = \frac{6x-3}{2} \quad \rightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{6x-3}{2}$$

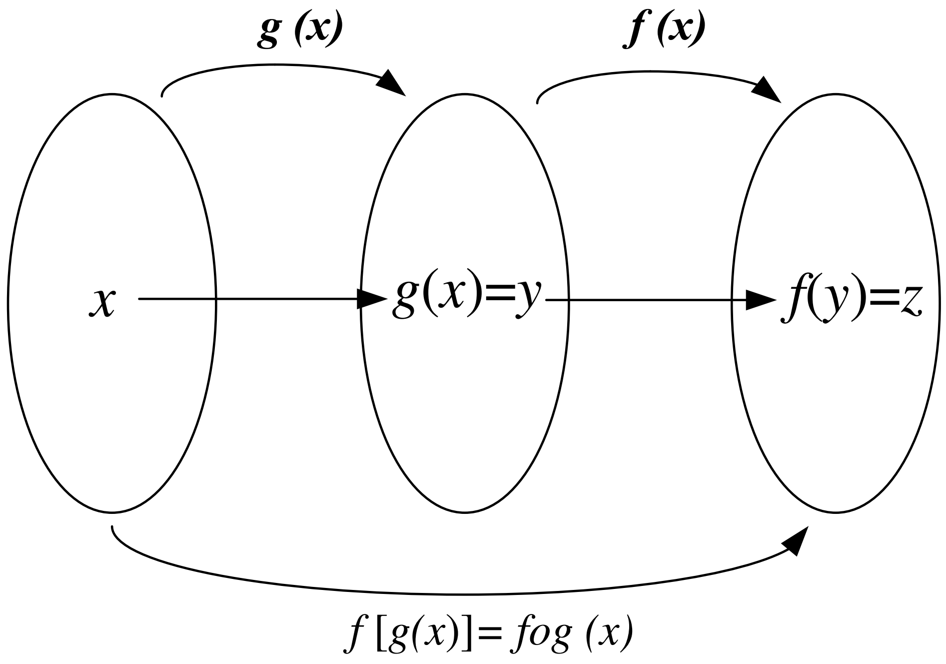
Birbirinin tersi olan fonksiyonlar $y = x$ doğrusuna göre simetriktirler. Aşağıda birim fonksiyon doğrusuna göre simetrik olarak verilmiş birbirinin tersi fonksiyonların grafiği görülmektedir.



Şekil 4.10: Ters Fonksiyonun Gösterimi

4.4.2 Bileşke Fonksiyon

$g : A \rightarrow B$ ve $f : B \rightarrow C$ fonksiyonları ile verilen $h : A \rightarrow C$ fonksiyonuna f ile g fonksiyonuna f ile g fonksiyonunun bileşkesi denir, $h = fog$ şeklinde yazılır ve "f bileşke g" şeklinde okunur.



Şekil 4.11: Bileşke fonksiyon gösterimi

Bileşke Fonksiyonun Özellikleri:

- $(fog)oh = fo(goh)$
- $(fof^{-1})\,(x) = (f^{-1}of)\,(x) = I\,(x) = x$
- $(fog)^{-1}(x) = (g^{-1}of)(x)$
- $(foI)(x) = (Iof)(x) = f(x)$
- $(fog)x = h(x)$ ise $f(x) = (hog^{-1})\,(x)$ veya $g(x) = (f^{-1}oh)\,(x)$
- $(fog)\,(x) = (gof)\,(x) = x\ ise\ f(x) = g^{-1}(x)$ veya $f^{-1}(x) = g\,(x)$ tir.

Örnek:

f ve g; R'den R'ye tanımlı iki fonksiyon olsun. $f(x) = 2x + 1$ ve $g\,(x) = 3x - 2$ olduğuna göre $(fog)(x) + (gof)\,(x)$ toplamı nedir?

Çözüm:

$$(fog)\,(x) = f\,(g(x))$$
$$= 2.g(x) + 1$$
$$= 2(3x - 2) + 1$$
$$(fog)\,(x) = 6x - 3$$
$$gof\,(x) = g\,(f(x))$$
$$= 3\,(f(x)) - 2$$
$$= 3(2x + 1) - 2$$
$$gof\,(x) = 6x + 1$$
$$(fog)\,(x) + (gof)\,(x) = (6x - 3) + (6x + 1)$$
$$(fo)\,(x) + (gof)\,(x) = 12x - 2$$

Örnek:

$$f(x) = x^2 - 1$$
$$g(x) = x^2 - 6x + 1$$
$$h(x) = 7x + 5$$

olarak verilmiştir.

$$(fogoh)(1) = ?$$

Çözüm:

$$(fogoh)(x) = f\{g[h(x)]\}$$

1 değeri önce h fonksiyonunda x yerine konur, buradan elde edilen değer sonra g fonksiyonunda x yerine konur ve buradanda elde edilen değer de f fonksiyonunda x yerine konarak sonuç elde edilir.

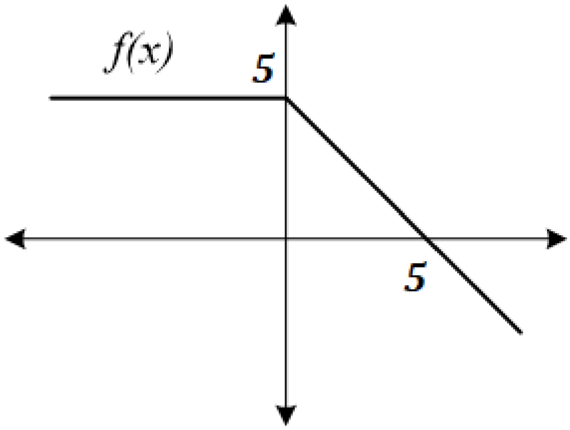
$$h(x) = 7x + 5$$
$$h(1) = 7.1 + 5 = 12$$
$$g(x) = x^2 - 6x + 1$$
$$g(x) = 12^2 - 6.12 + 1 = 73$$
$$f(x) = x^2 - 1$$
$$f(x) = 73^2 - 1 = 5328$$
$$(fogoh)(1) = 5328$$

Uygulama

Parçalı Fonksiyon

Aşağıda bir parçalı fonksiyon verilmiştir. Parçalı fonksiyonda kırılma noktası önemlidir. Kırılma noktasının bir tarafında farklı fonksiyon, diğer tarafında farklı fonksiyon bulunur. y ekseni $(x = 0)$ kırılma noktasıdır. y ekseninin sol tarafında $x < 0$ iken, sabit $y = 5$ doğrusu, sağ tarafında ise $x > 0$ iken, $y = -x + 5$ doğrusu bulunmaktadır. O halde bu parçalı fonksiyon aşağıdaki gibi yazılır.

$$f(x) = \begin{cases} 5, & x < 0 \\ -x + 5, & x \geq 0 \end{cases}$$



Uygulama Soruları

1) $f\ (x)\ =\ 4x + 1$ ve $fog(x)\ =\ 2x + 3$ ise $g(x)$ kaçtır?

Çözüm:

$(fog)\ (x)\ =\ 2x + 3 \qquad 4g(x) + 1\ =\ 2x + 3$

$$4g(x)\ =\ 2x + 2\ \rightarrow\ g(x)\ =\ \frac{2x+2}{4} = \frac{x+1}{2}$$

2) $f(x) = 5x - 3$ olduğuna göre $f(5)$ =?

Çözüm:

$f(x) = 5x - 3$

$f(5) = 5.5 - 3 = 22$'dir.

3) $f(x) = ln\,5$ olduğuna göre $f(2)$ =?

Çözüm:

$f(x) = ln\,5$ fonksiyonu sabit fonksiyondur. Her zaman aynı değeri alır. $f(2) = \ln 5$'tir.

4) $f(x) = 3x - 1$ fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi <u>söylenemez</u>?

a) Birebir fonksiyondur.	Doğru
b) Doğrusal fonksiyondur	Doğru
c) $x = -1$ için $f(-1) = -4$ değerini alır.	Doğru
d) Birim fonksiyondur.	Yanlış
e) $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$	Doğru

5) $f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi doğrudur.

a) Birebir fonksiyondur.	Yanlış
b) İkinci dereceden fonksiyondur.	Doğru
c) $x = -1$ için $f(-1) = 0$ değerini alır.	Yanlış
d) Birim fonksiyondur.	Yanlış
e) $f(x)$'in tersi de bir fonksiyondur	Yanlış

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde, bağıntı ve fonksiyon tanımlarının ardından fonksiyon türleri üzerinde durulmuştur. Sabit fonksiyon, birebir fonksiyon, içine ve örten fonksiyon tanımları verilmiştir. Son kısımda ise bileşke fonksiyon ve ters fonksiyon anlatılmıştır.

Bölüm Soruları

1) $f(x) = \sqrt{8-2x}$ fonksiyonunun tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

a) $[4,\ \infty)$
b) $(-\infty,\ 4]$
c) $(-\infty, -4)$
d) $(4, \infty)$
e) $(-\infty,\ \infty)$

2) $f(x) = \sqrt{x}$ ve $g(x) = x^2 + 4$ olduğuna göre $gof(x) = ?$

a) $x + 2$
b) $x - 2$
c) $\sqrt{x^2 + 4}$
d) $x + 4$
e) $\sqrt{x + 4}$

3) $y = \frac{5x+2}{x-3}$ fonksiyonu hangi apsis değeri için tanımlı <u>değildir</u>?

a) 0 b) 3 c) -3 d) $(-3,\ 3)$ e) R

4) $f(x) = x/(x^2 + 2)$ fonksiyonu için $f(0) + f(1) = ?$

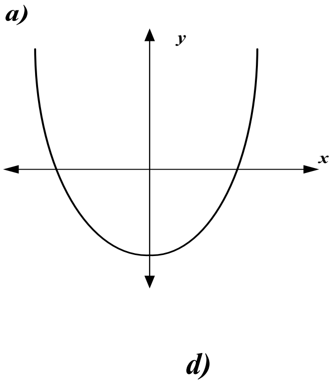
a) $-1/3$ b) 1 c) 3 d) 0 e) 1/3

5) $f(x) = \begin{cases} -2x + 5, & x < 0 \\ x/3, & x \geq 0 \end{cases}$ fonksiyonu için $f(-1) + f(0) = ?$

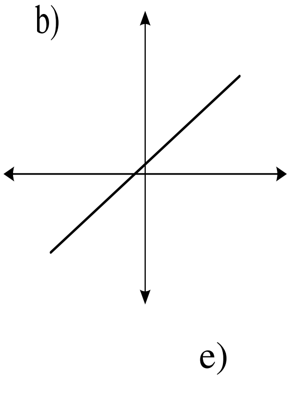
a) 7 b) 5 c) 3 d) 1 e) -7

6) Aşağıdakilerden hangisi bir fonksiyon <u>değildir</u>?

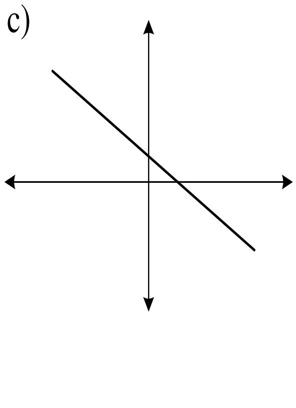
a)



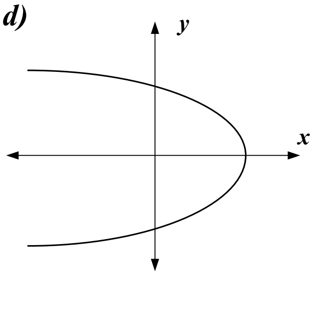
b)



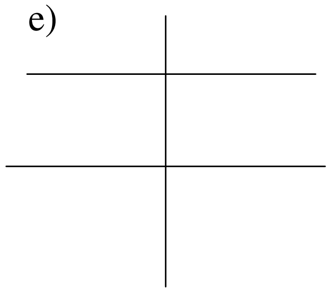
c)



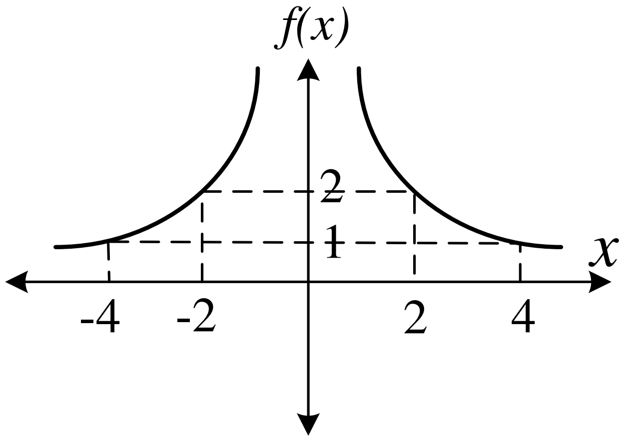
d)



e)

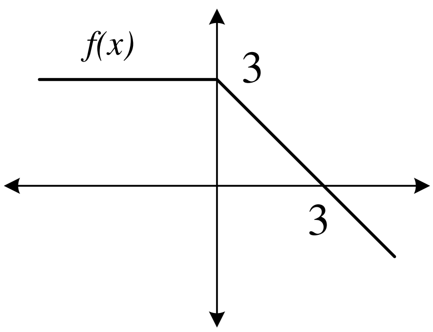


7) Aşağıda verilen $f(x)$fonksiyonu için $f(-2) + 3f(4) =?$



a) 0 b) 1 c) 5 d) 2 e) ∞

8) Aşağıda verilen parçalı fonksiyonun kuralı hangisidir?



a) $f(x) = \begin{cases} 3, & x < 0 \\ -x, & x \geq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 3, & x < 0 \\ -x + 3, & x \geq 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ 3, & x \geq 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 3, & x < 0 \\ x + 3, & x \geq 0 \end{cases}$

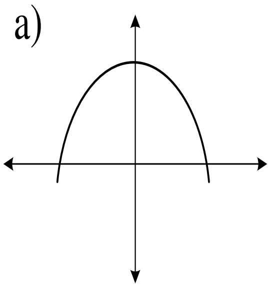
e) $f(x) = -x + 3$

9) $f(x) = \sqrt[4]{2x - 8}$ fonksiyonunun tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

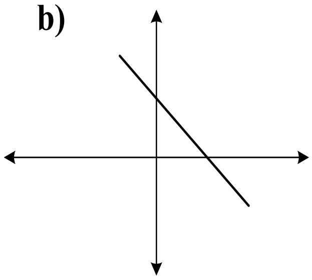
a) $(4,\ \infty)$ b) $(-\infty,\ 4]$ c) $[4, \infty)$ d) $(-\infty, -4)$ e) $(-\infty,\ \infty)$

10) Aşağıdaki seçeneklerden hangisi birebir fonksiyondur?

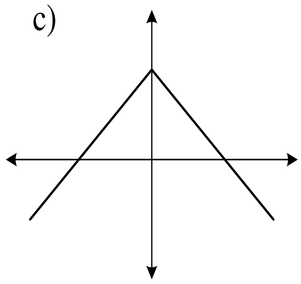
a)



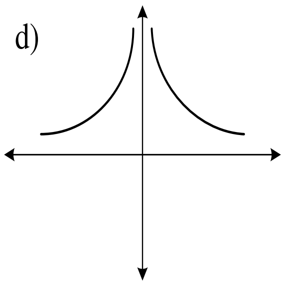
b)



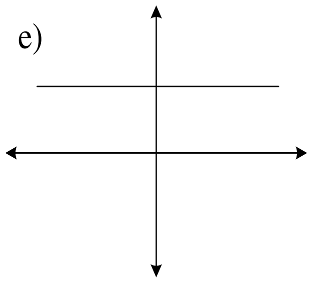
c)



d)



e)



Cevaplar

1) b, 2) d, 3) b, 4) e, 5) a, 6) d, 7) c, 8) b, 9) c, 10) b.

5. DOĞRULAR, DOĞRUSAL FONKSİYONLAR

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

5.1. Doğrusal Fonksiyon
5.2. Doğrunun Eğimi
5.3. Doğru Denklemi
5.4. Doğruların Kesişimi

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1) Doğrusal Fonksiyon nedir?

2) Doğruların grafikleri nasıl çizilir?

3) Doğruların kesişimi nasıl bulunur?

4) Arz ve talep fonksiyonları nedir?

5) Gelir gider ve kâr fonksiyonları nelerdir?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	**Kazanım**	**Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği**
Doğrusal Fonksiyon	Doğrusal fonksiyon tanımını anlamak	Okuyarak, fikir yürüterek
Doğrunun Eğimi	Eğimin nasıl bulunacağını belirlemek	Okuyarak, fikir yürüterek, örnek sorular çözerek
Doğru Denklemi	Doğru denklemini yazabilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, uygulama çözerek
Arz Talep Fonksiyonları ve Başabaş Analizi	Doğrusal fonksiyonların ekonomi hayatında kullanımını anlamak	Okuyarak, fikir yürüterek, uygulama yaparak, araştırma yaparak

Anahtar Kavramlar

- Doğrusal Fonksiyon
- Doğrunun Eğimi
- Doğru Çizimi
- Doğru Denklemi
- Arz ve Talep Doğuları

Giriş

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in R$ ve $a_0 \neq 0$ olmak üzere;

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2{}^2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

biçimindeki fonksiyonlara "**n. dereceden polinom fonksiyon**" denir.

Polinom fonksiyonunun tanım kümesi R'dir $(-\infty, \infty)$. x yerine konamayacak herhangi bir reel sayı yoktur. Bir polinom fonksiyonda a_0 dışında kalan diğer tüm a katsayıları 0 olduğunda, bu fonksiyona sıfırıncı dereceden polinom fonksiyon ya da **sabit fonksiyon** denir. Eğer a_0 ve a_1 dışında kalan diğer tüm katsayılar 0 ise, birinci dereceden polinom fonksiyon (**doğrusal fonksiyon**), a_0 , a_1 ve a_2 dışında kalan diğer tüm katsayılar 0 ise ikinci dereceden polinom fonksiyon (**kuadratik fonksiyon**) adını alır.

Yukarıda açıklandığı gibi, $a \neq 0$ ve $a, b \in \mathrm{R}$ olmak üzere $f(x) = y = ax + b$ şeklinde gösterilen fonksiyonlara birinci dereceden polinom fonksiyonlar veya doğrusal fonksiyonlar adı verilir. Her doğrusal fonksiyonun tanım kümesi ve görüntü kümesi R'dir. Genel olarak işletme ve ekonomi problemlerinde talep (istem), arz (sunum), maliyet, gelir ve kâr fonksiyonları modellenirken doğrusal fonksiyon olarak gösterilebilir.

$f(x) = x$ yani $(y = x)$ fonksiyonu bir doğrusal fonksiyondur: $(a = 1\, ve\, b = 0)$. Doğrusal fonksiyonlar grafik düzlemde ($x \leftrightarrow y$ kartezyen koordinat sistemi düzleminde) bir doğru oluşturur. Doğrusal fonksiyonun x-eksenini kestiği noktayı bulmak için fonksiyon 0'a eşitlenir $(y = ax + b = 0)$. Bu fonksiyonun özel bir hâlidir. Bu durumda doğrusal bir denklem oluşur. Bu denklemin çözümü de;

$$\boldsymbol{x = -\frac{b}{a}}$$

olur. Doğrusal fonksiyona örnek olarak q üretim (satış) miktarını, p'de birim satış fiyatını göstermek üzere bir ürünün talep fonksiyonu, $p = f(q) = aq + b$ biçiminde, yani fiyatın miktara bağlı bir fonksiyonu olarak yazılabilmektedir.

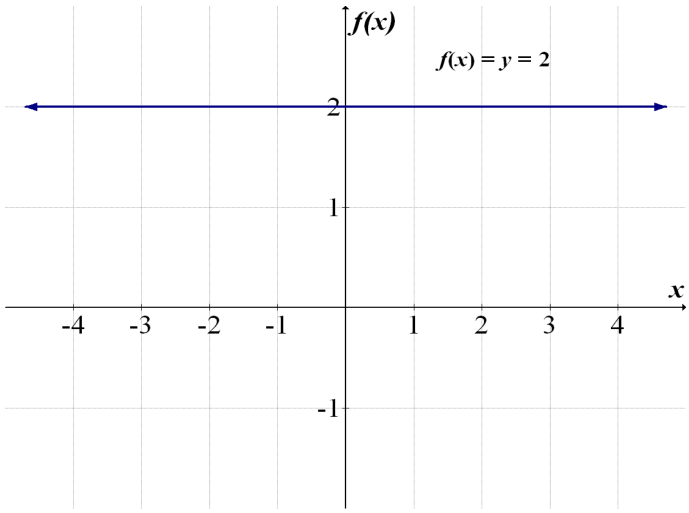
$f(x) = y = ax + b$ fonksiyonunda, $a, b \in \mathrm{R}$ olmak üzere, x bağımsız değişken, y'de x değişkenine bağlı bağımlı değişken olarak adlandırılır. $f(x)$ yani y, x'in değişimine bağlı olarak değişir. Doğrusal fonksiyonlarda, bağımlı ve bağımsız değişken birinci derecedendir. (yani üsleri birdir.)

Doğrusal fonksiyonun bir diğer gösterimi; $ax + by + c = 0$ biçiminde yapılabilir.
$f(x) = y = ax + b$ biçiminde yazılan fonksiyonda, a katsayısı doğrunun eğimini, b sayısı ise doğrunun y-eksenini kestiği noktayı verir. Grafik düzlemde bir doğruyu çizebilmek için;

- Doğrunun geçtiği iki nokta bilinmeli veya
- Doğrunun eğimi ve geçtiği bir nokta bilinmelidir.

5.1 Sabit Fonksiyon

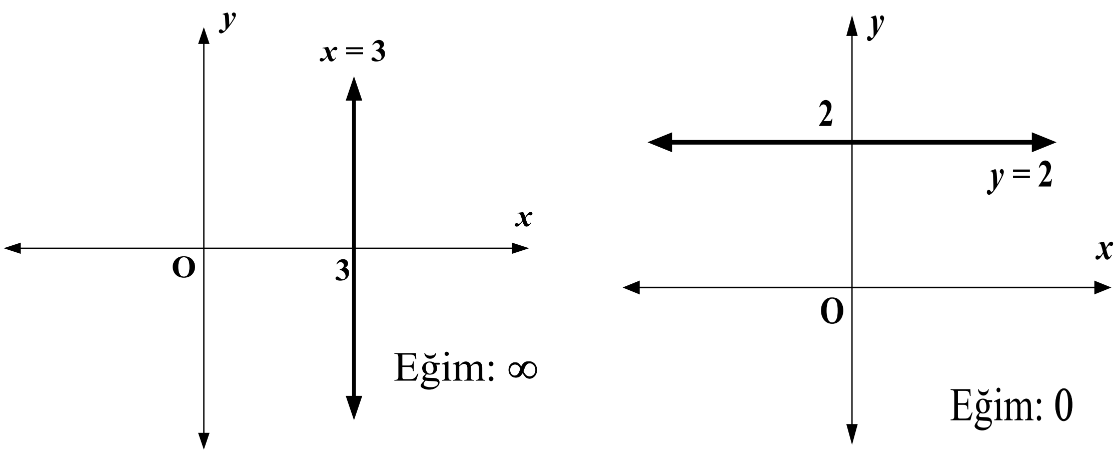
Eğimi 0 (a = 0) olan yani $y = ax + b$ fonksiyonunda sadece sabit terim olduğunda bu tür fonksiyonlar ($y = b$) sabit fonksiyondur. b herhangi bir reel sayı olmak üzere, $f(x) = b$ denklemi ile verilen, yani, her x reel sayısına aynı b reel sayısını karşılık getiren fonksiyona, sabit fonksiyon denir. Sabit fonksiyonun grafiği bir yatay doğrudur: Örneğin $y = f(x) = 2$ fonksiyonu sabit fonksiyona bir örnektir.



Şekil 5.1: Sabit fonksiyon grafiği

5.2 Düzlemde Doğrular

Yukarıda, her doğrusal fonksiyonun grafiğinin bir doğru oluşturduğunu gördük. Aşağıda göreceğiz ki, her yatay doğru bir sabit fonksiyonun ve her eğik doğru da bir doğrusal fonksiyonun grafiğidir. Bu arada, dikey doğrular da vardır. Ancak bunlar fonksiyon tanımına uymadıkları için sadece denklemi ve grafiği anlatılacaktır. Dikey doğru deyimi yerine düşey doğru deyimi de kullanılır.

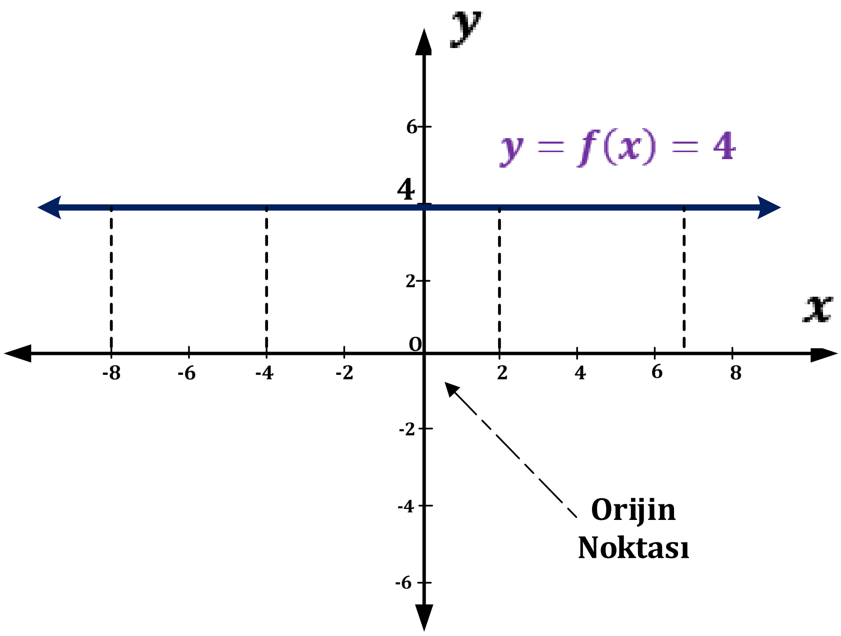


Şekil 5.2: Doğrularda sıfır ve sonsuz eğim kavramı

Aşağıda sabit fonksiyon grafiklerine örnek verilmektedir.

Örnek:

$y = f(x) = 4$ sabit fonksiyonu;



5.2.1 Bir Doğrunun Eğiminin Bulunması

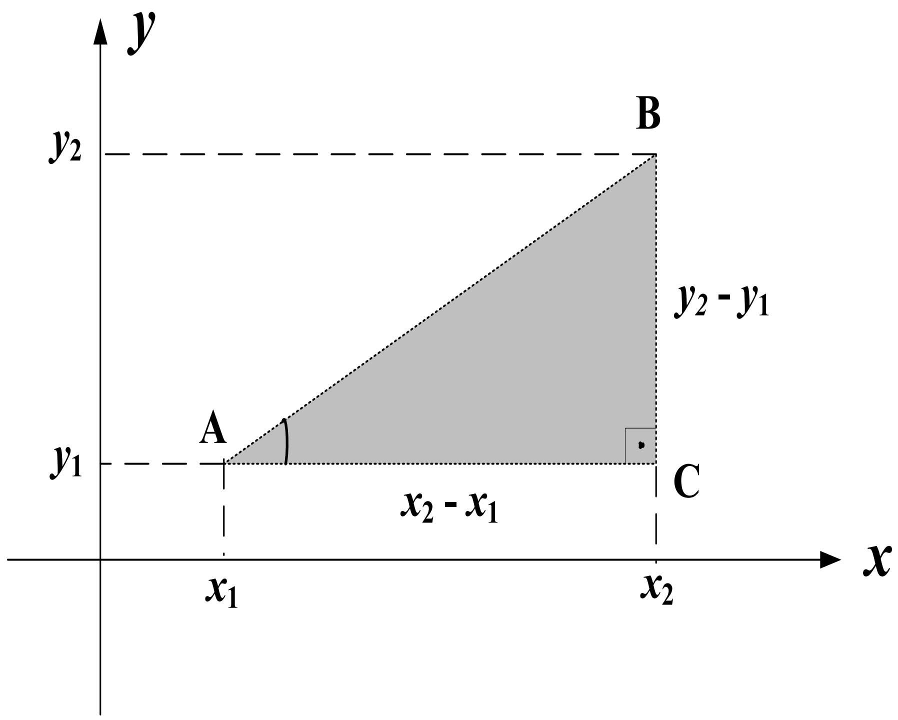
Eğimin bulunabilmesi için ya fonksiyon bilinmeli veya fonksiyonun geçtiği herhangi iki nokta bilinmelidir. Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi, A ve B gibi iki noktadan geçen doğrunun eğimi;

y'deki değişim: $\Delta y = y_2 - y_1$

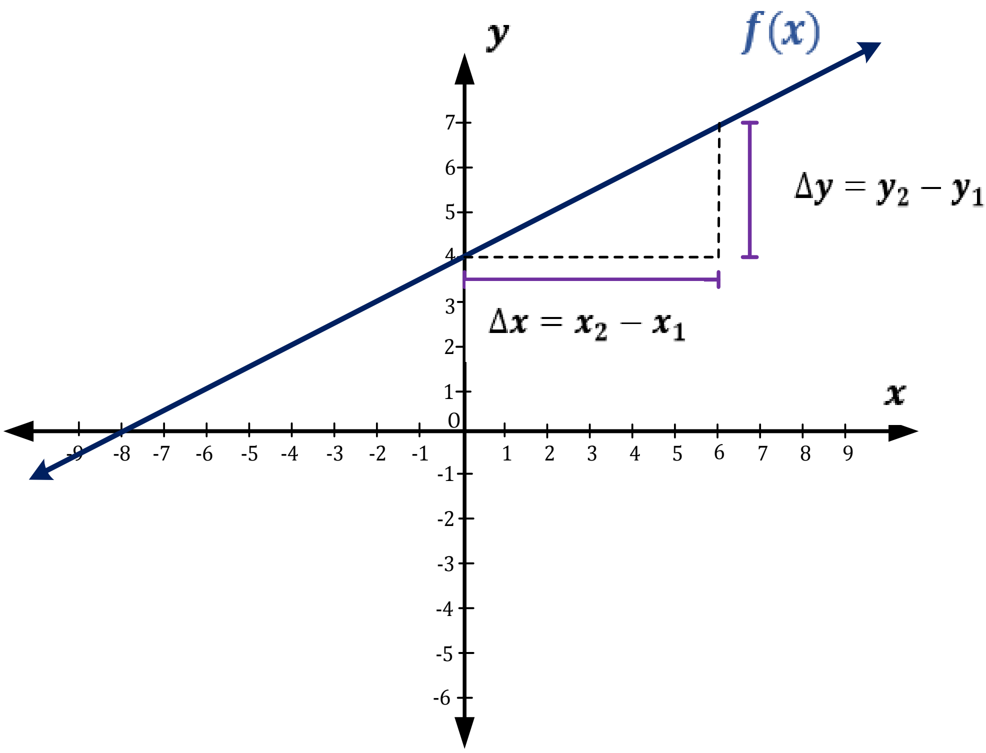
x'deki değişim: $\Delta x = x_2 - x_1$

$$\textbf{Eğim} = a = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$a = m = \frac{\| \mathrm{BC} \|}{\| \mathrm{AC} \|} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

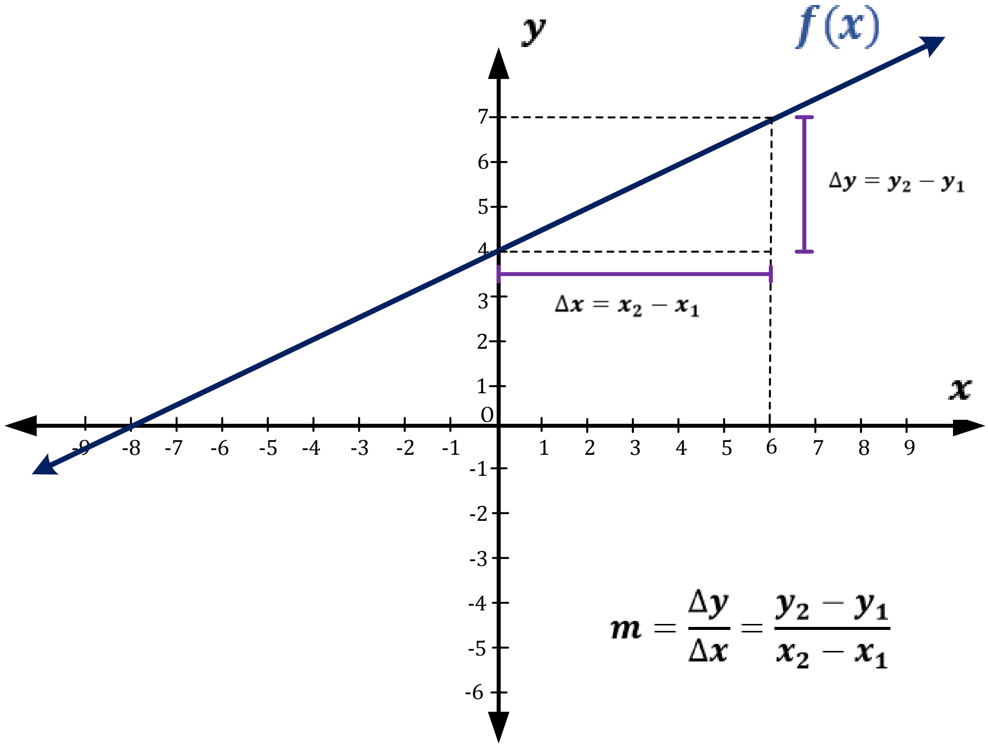


Şekil 5.3: Doğrunun eğimi

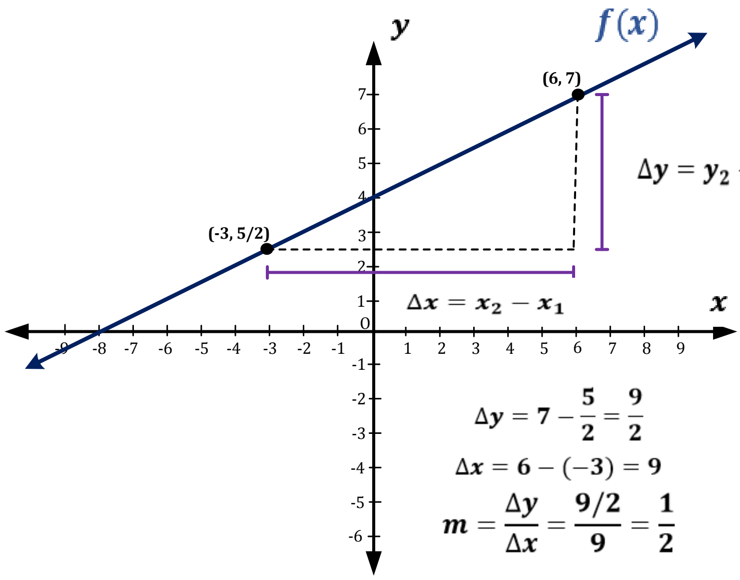


5.2.2 Pozitif ve Negatif Eğimli Doğrular

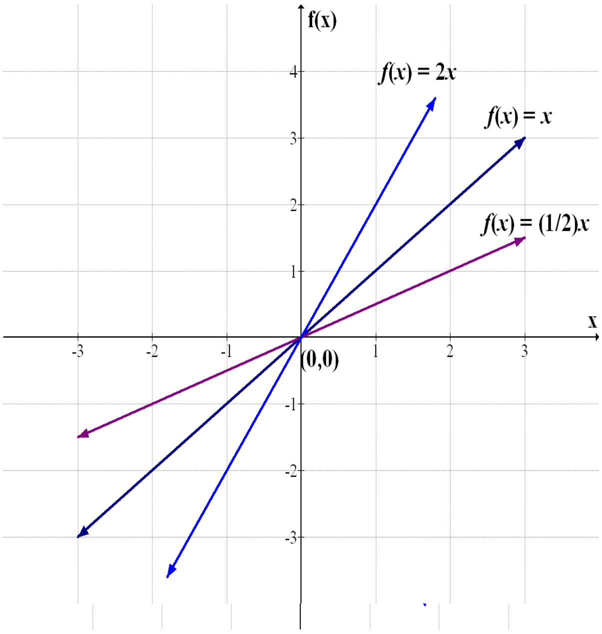
Dikkat edilirse eğim pozitif iken doğrular sağa yatık, negatif iken sola yatık olurlar. Bağımlı y ve bağımsız x değişkenler aynı yönde değişim gösterdiğinde pozitif eğimli, zıt yönde değişim gösterdiğinde negatif eğimli doğrular oluşur.



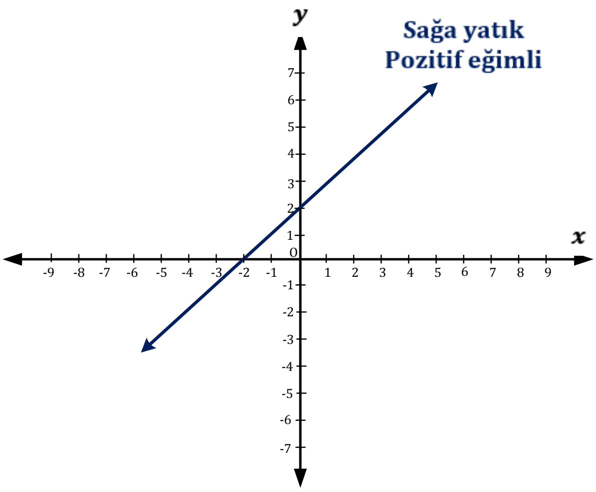
$f(x)$
y
x
$\Delta y = y_2 - y_1$
$\Delta x = x_2 - x_1$
$m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

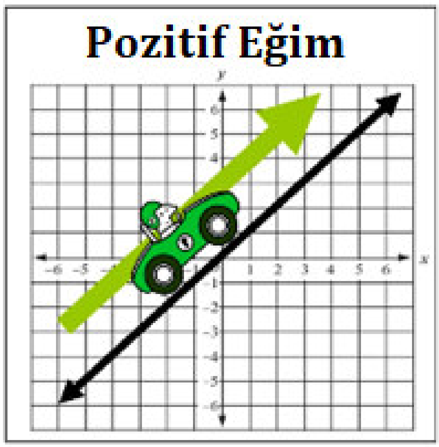


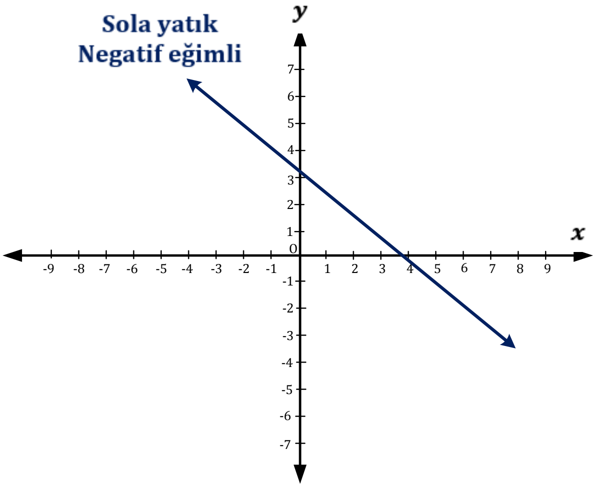
$f(x)$
y
x
(6, 7)
(-3, 5/2)
$\Delta y = y_2 - y_1$
$\Delta x = x_2 - x_1$
$\Delta y = 7 - \dfrac{5}{2} = \dfrac{9}{2}$
$\Delta x = 6 - (-3) = 9$
$m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{9/2}{9} = \dfrac{1}{2}$

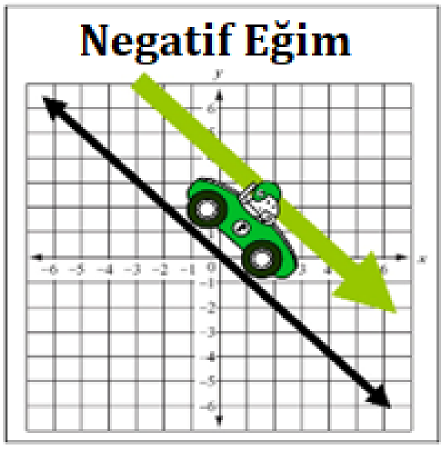


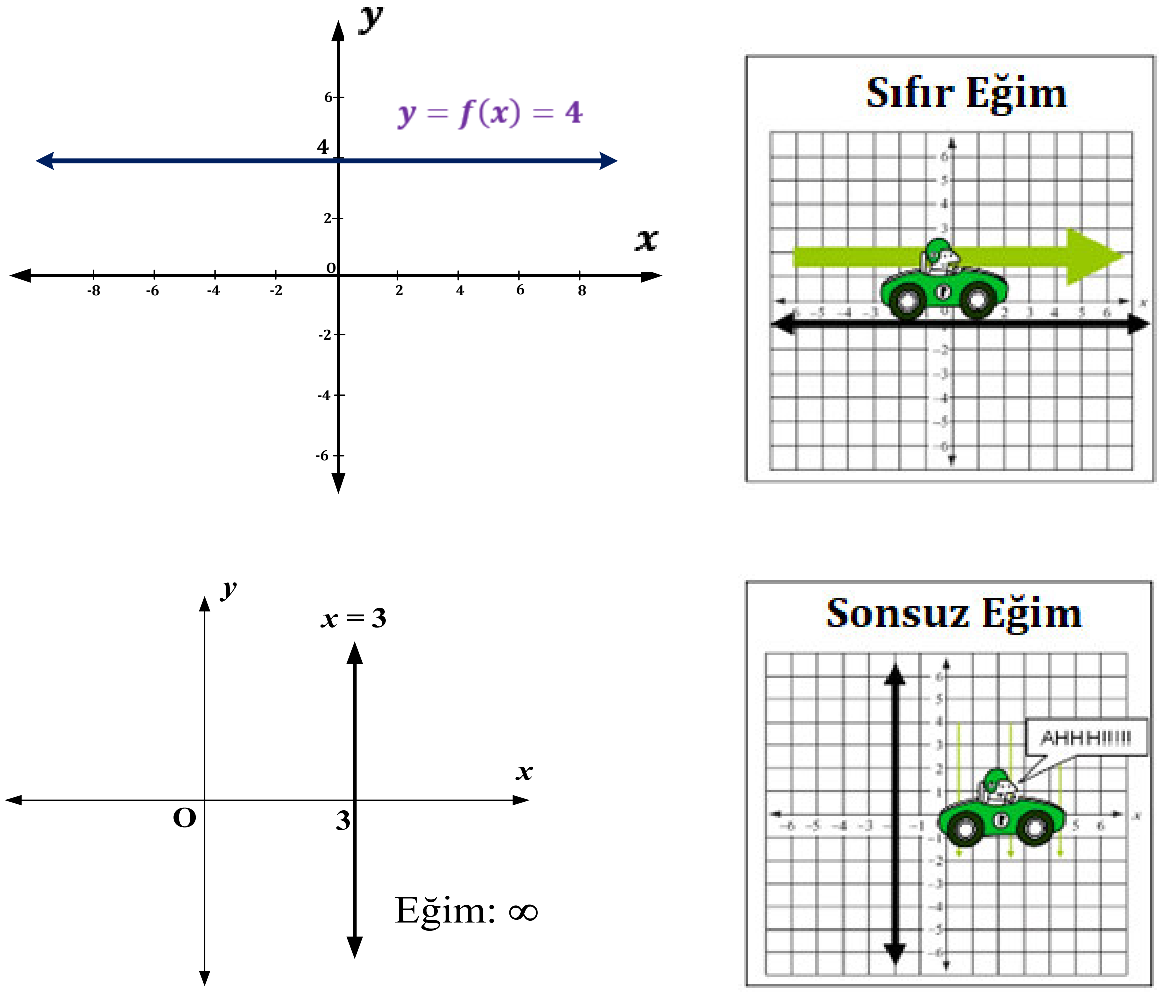
Şekil 5.4: Farklı eğimlere sahip doğrular



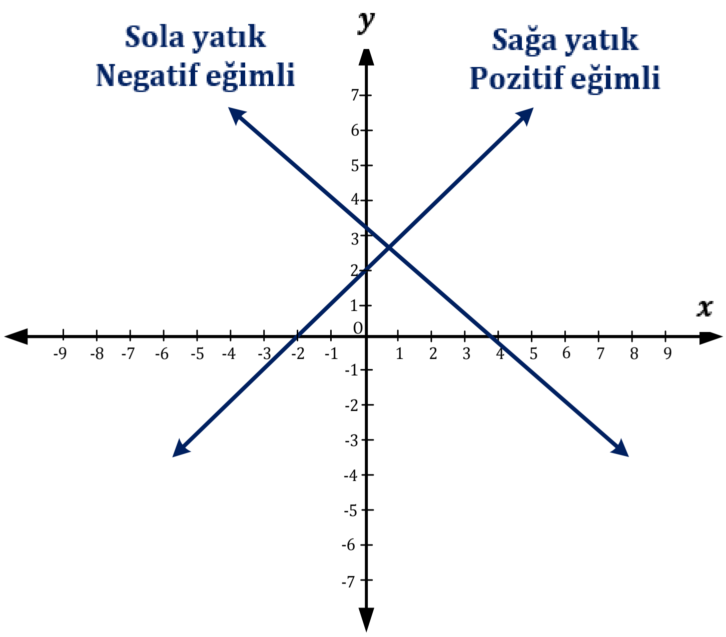






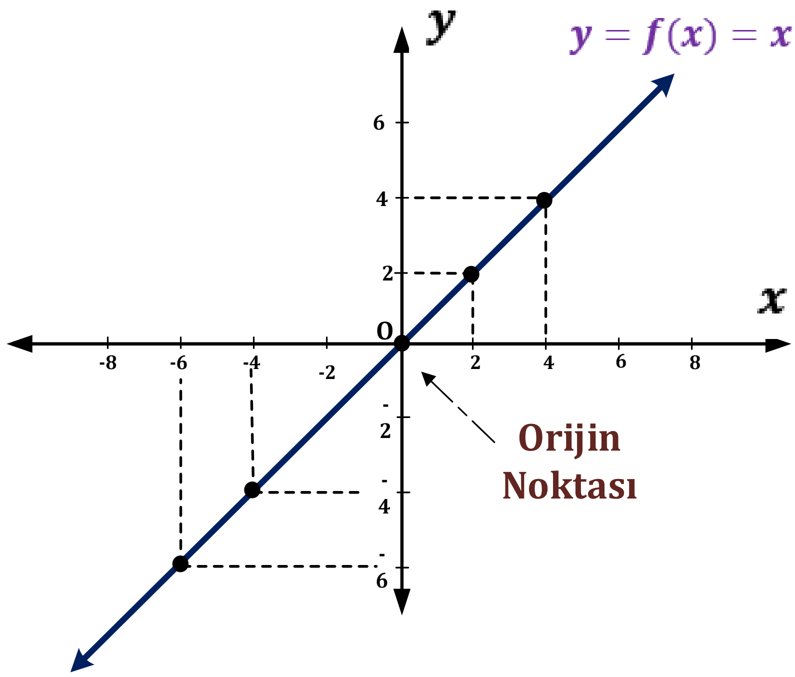


Şekil 5.5: Doğruların eğimleri



Şekil 5.6: Pozitif ve Negatif eğimli doğrular

5.2.3 Birim Fonksiyon Grafiği



Örnek:

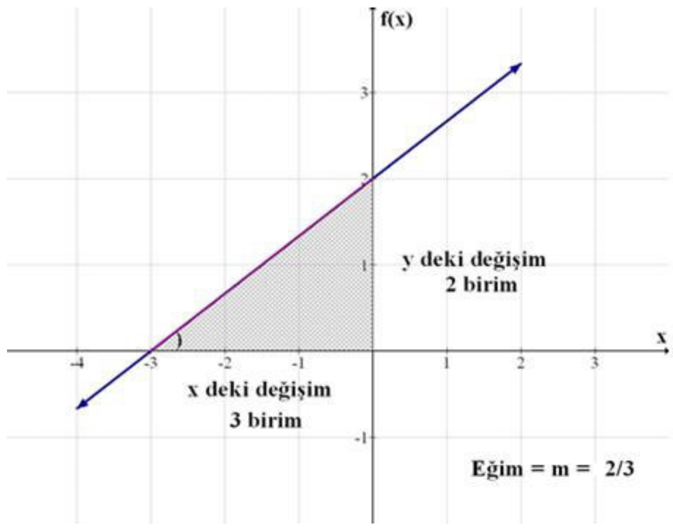
$A(-3{,}0)$ ve $B(0{,}2)$ noktasından geçen doğrunun eğimini bulunuz ve grafik düzlemde bu doğruyu gösteriniz.

Çözüm:

AB noktaları arasında yatay değişim 3 birim iken, dikey değişim, 2 birim olmuştur. Bir başka deyişle x değişkeni 3 birim artarken (-3'ten 0'a) y değişkeni 2 birim artmıştır (0'dan 2'ye). İki değişken aynı yönde değişim gösterdiğinden doğrunun eğimi pozitif olacak ve y eksenine göre düşünüldüğünde sağa yatık bir doğru olacaktır. Eğimi ise

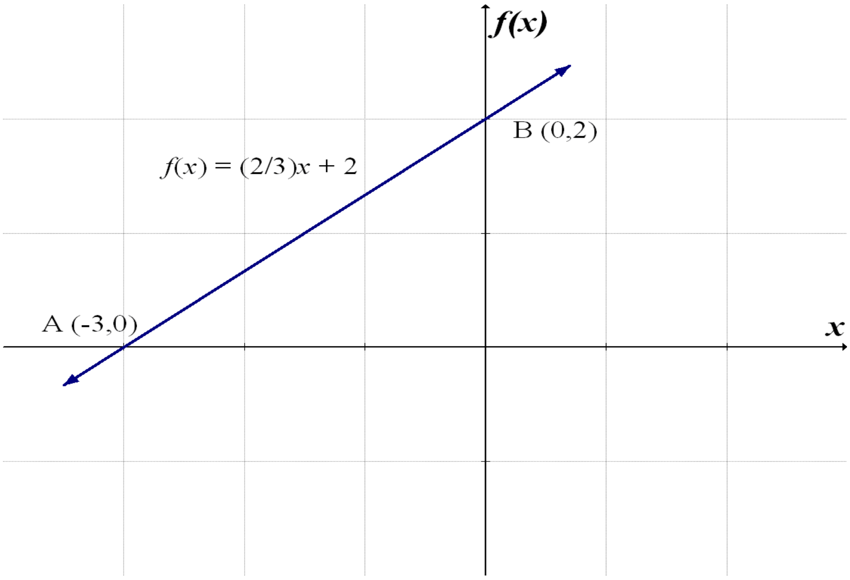
$$a = m = \frac{\| BC \|}{\| AC \|} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{0 - (-3)} = \frac{2}{3}$$

Ve grafiği ise;



Şekil 5.7: Doğru eğimi, değişimler

şeklinde olacaktır. Verilen fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 5.8: $y = (2/3)x + 2$ Fonksiyonunun Grafiği

Örnek:

$f(x) = (2/3)x + 2$ doğrusunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

Doğrusal fonksiyonun grafiğini çizmek için genel olarak yapılan, fonksiyonun x ve y eksenlerini hangi nokta ya da noktalarda kestiğini bulmakla mümkündür.

Fonksiyonun y-eksenini kestiği nokta için x yerine 0 konur,

$f(0) = (2/3).0 + 2 = 2$

Demek ki fonksiyon; (0,2) noktasında y eksenini kesmektedir.

Fonksiyonun x-eksenini kestiği nokta için fonksiyon 0'a eşitlenir.

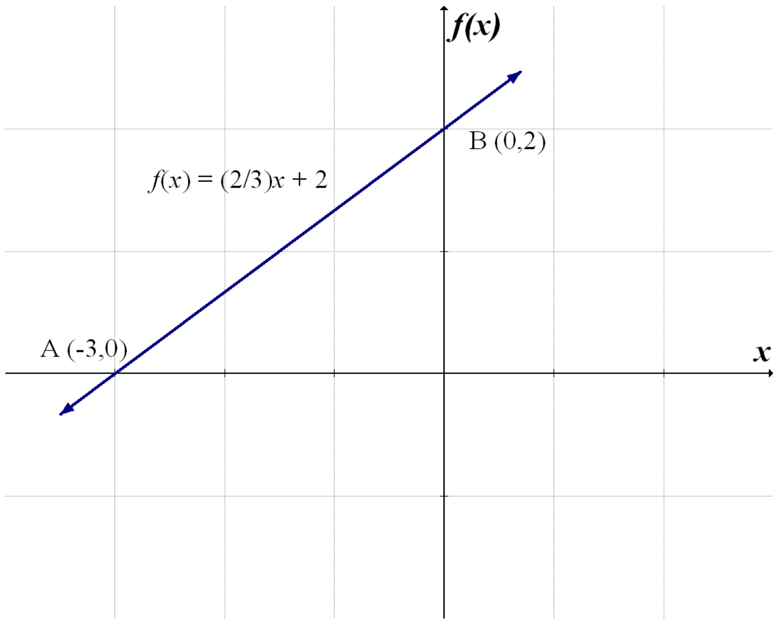
Demek ki fonksiyon; (0,2) noktasında y eksenini kesmektedir.

$$f(x) = y = (2/3)x + 2 = 0$$

$$(2/3)x = -2$$

$$x = -\frac{2}{\frac{2}{3}} = -3$$

Bu çözüm de fonksiyonun yani doğrunun (-3,0) noktasında x eksenini kestiğini göstermekte ve grafiği de aşağıdaki gibidir.



Şekil 5.9: $y = (2/3)x + 2$ grafiği

Örnek:

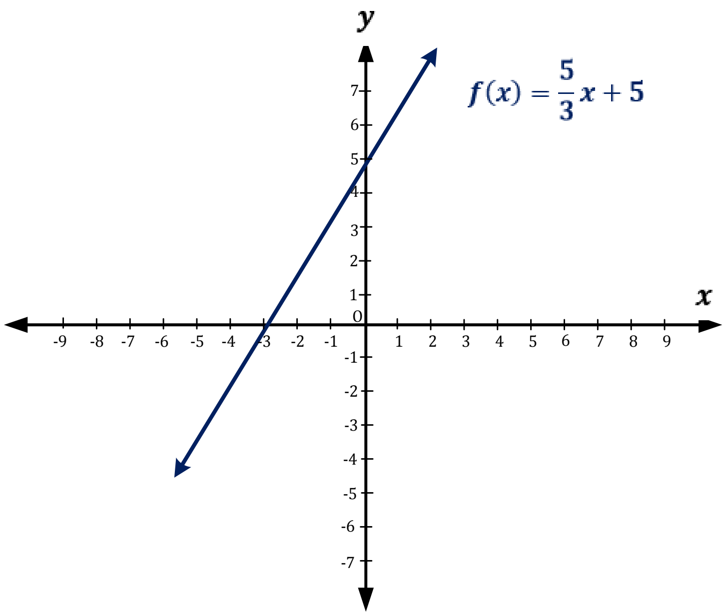
$y = (5/3)x + 5$ doğrusunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

x'in katsayısı $5/3$ olduğuna göre doğrunun eğimi pozitif ve $5/3$'tür. Sağa yatık bir doğru olmalıdır. Sabit terim 5 olduğuna göre y eksenini 5'te kesecektir. Eğimin $5/3$ olabilmesi için de x eksenini -3'te keseceği anlaşılır. Bunu bulmak için;

$$(5/3)x + 5 = 0$$

işlemi yapılarak doğrunun x eksenini $x = -3$ elde edilmiş olur.



Örnek:

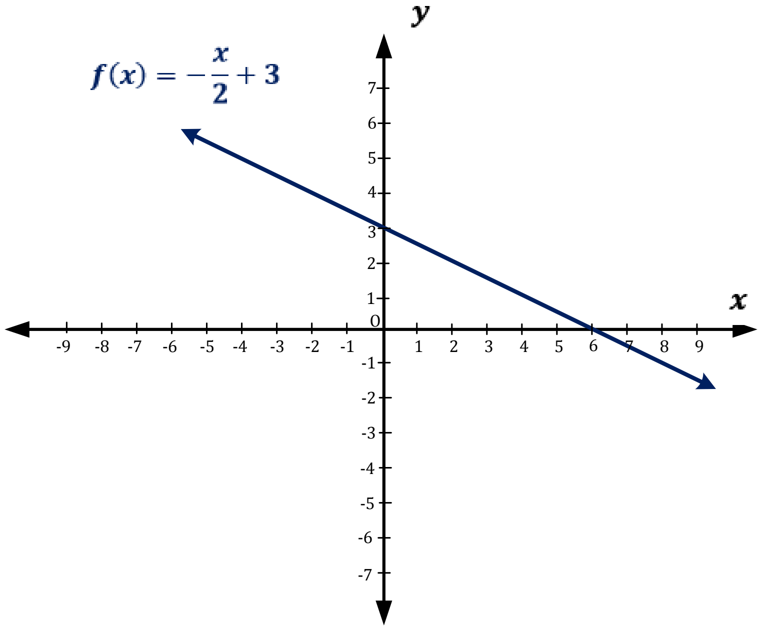
$y = (-1/2)x + 3$ doğrusunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

x'in katsayısı $-1/2$ olduğuna göre doğrunun eğimi negatif ve $-1/2$'dir. Sola yatık bir doğru olmalıdır. Sabit terim 3 olduğuna göre y eksenini 3'te kesecektir. Eğimin $-1/2$ olabilmesi için de x eksenini 6'te keseceği anlaşılır. Bunu bulmak için;

$$(-1/2)x + 3 = 0$$

işlemi yapılarak doğrunun x eksenini $x = 6$ elde edilmiş olur.



5.3 Doğru Denkleminin Oluşturulması

Bir doğrunun eğimi ve geçtiği herhangi bir nokta biliniyor ise bu doğrunun denklemi (fonksiyon) aşağıdaki gibi önce eğim bulunarak kullanılarak kolaylıkla yazılabilir.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_1 = m.(x - x_1)$$

İki noktası bilindiğinde eğimi bulmadan doğrudan fonksiyon aşağıdaki gibi belirlenebilir.

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Örnek: (-1,-1) ve (1,3) noktalarından geçen doğru denklemini yazınız ve grafiğini çiziniz.

Çözüm:

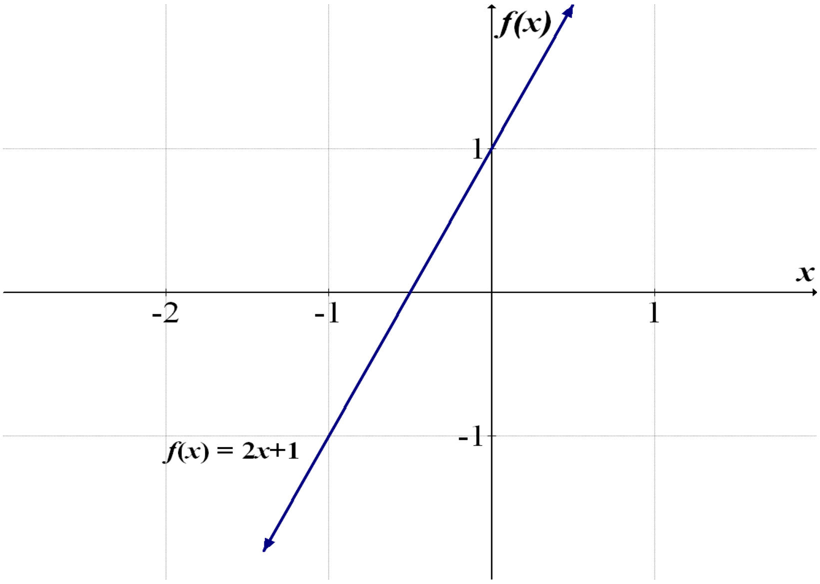
$$\frac{y - (-1)}{3 - (-1)} = \frac{x - (-1)}{1 - (-1)}$$

$$\frac{y + 1}{4} = \frac{x + 1)}{2}$$

$$\frac{y + 1}{2} = x + 1 \quad \rightarrow y + 1 = 2x + 2$$

$$y = f(x) = 2x + 1$$

olur, grafiği de aşağıdaki gibidir.



Şekil 5.10: $y = 2x + 1$ grafiği

Örnek:

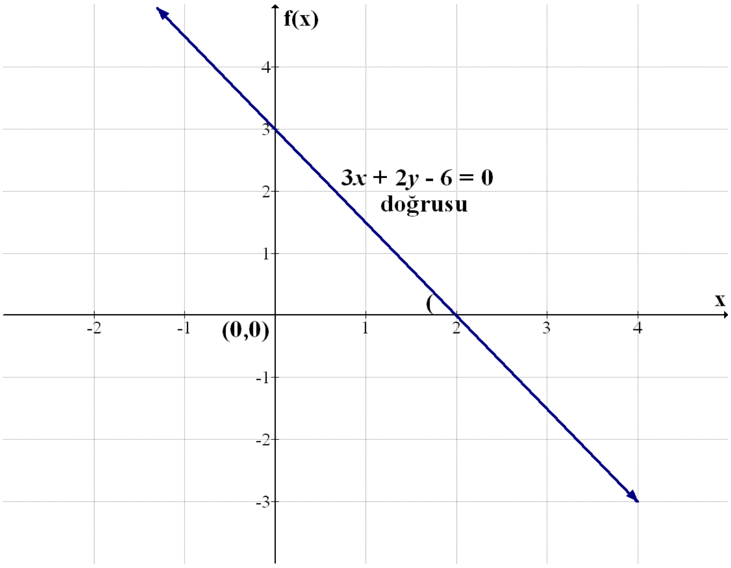
$3x + 2y - 6 = 0$ doğrusunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: Doğrunun grafiğini kolaylıkla çizebilmek için eksenleri kestiği noktaları bulmak yeterli olacaktır.

$x = 0$ için; $3.0 + 2y - 6 = 0$, y = 3

$y = 0$ için; $3x + 2.0 - 6 = 0$, x = 2

çıkar. Dolayısıyla fonksiyon (2,0) ve (0,3) noktalarından geçer. Grafiği de aşağıdaki gibi olur.



Şekil 5.11: $3x + 2y - 6 = 0$ doğrusu grafiği

5.4 Doğruların Kesişimi

İki doğrunun kesişim noktası, verilen denklem takımındaki her iki fonksiyonun da bir noktası olduğundan, bu noktayı bulabilmek için verilen denklemler birbirine eşitlenir.

Örneğin; $f(x) = -2x + 3$ ve $g(x) = x - 3$ doğrularının kesişim noktasını bulalım;

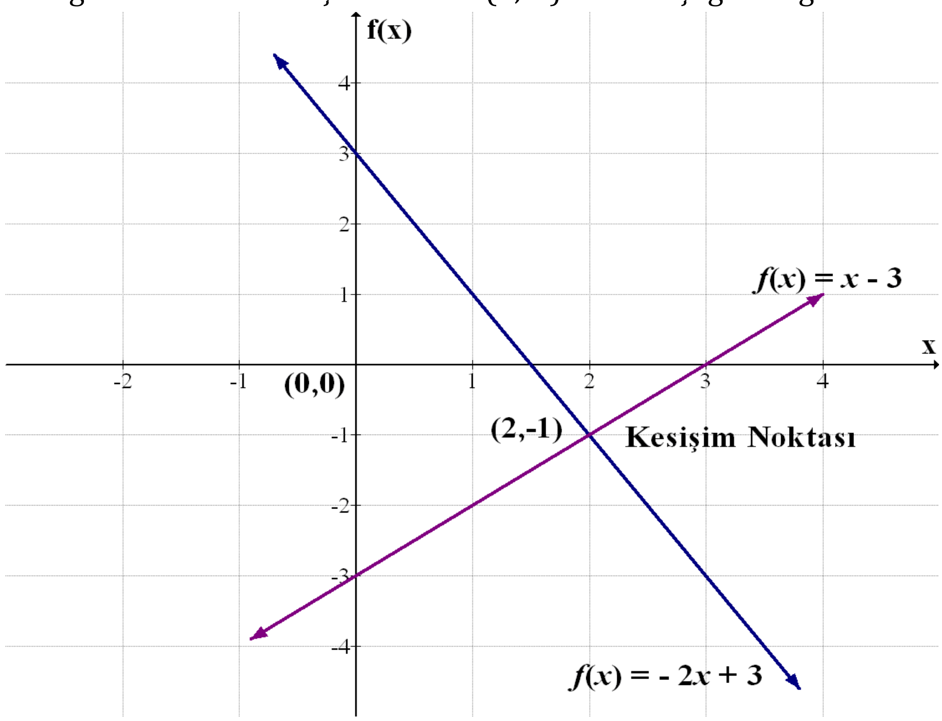
$$-2x + 3 = x - 3$$

$$-2x - x = -3 - 3$$
$$-3x = -6$$
$$x = 2$$

bulunur. y değerini bulabilmek için bulunan x değeri verilen fonksiyonlardan birinde yerine konur.

$$f(x) = -2.2 + 3 = -1$$
$$y = -1$$

bulunur. Bu değerler sonrası kesişim noktası (2,-1) olarak aşağıdaki gibi olur.



Şekil 5.12: Doğrularda Kesişiminin Gösterimi

Uygulama

Doğru denklemi ve grafiği

$2x + y - 3 = 0$ doğrusunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

$2x + y - 3 = 0$ dorusu $y = -2x + 3$ dorusu ile aynıdır. $ax + by + c = 0$ biçiminde gösterilmiştir.

Doğrunun grafiğini kolaylıkla çizebilmek için eksenleri kestiği noktaları bulmak yeterli olacaktır.

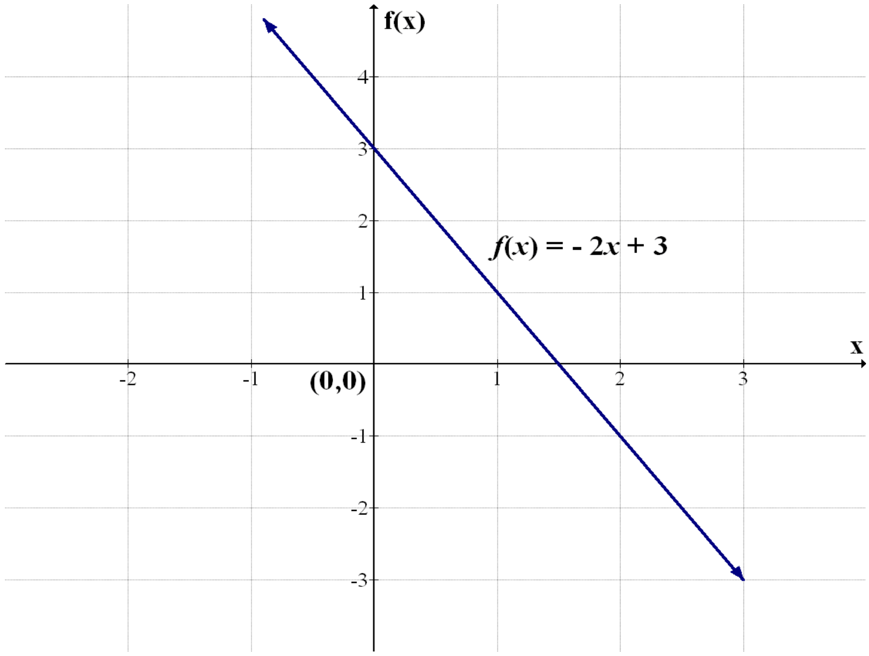
$y = -2x + 3$

$x = 0$ için; $y = -2.0 + 3$=3

$$y = 3$$

$y = 0$ için; $-2x + 3 = 0$, $x = (3/2)$

çıkar. Dolayısıyla fonksiyonun grafiği de aşağıdaki gibi olur.



Şekil 5.13: $y = -2x + 3$ Doğrusu Grafiği

Dikkat edilirse eğimi negatif olup doğru sola yatık bir doğrudur.

Uygulama Soruları

İktisatta Arz ve Talep fonksiyonları doğrusal olarak verildiğinde, doğrusal fonksiyonların bütün özelliklerinden yararlanılır.

1) p fiyatı, q miktarı göstermek üzere bir ürünün arz ve talep denklemleri $2p - q = 60$ $3q + 4p = 240$ olduğuna göre pazar denge noktasını bulunuz. Denge noktası satış fiyatı ve satış miktarı nedir?

Pazar denge noktasını bulmak için ürünün arz ve talep fonksiyonu kesiştirilir.

$$p = q/2 + 30$$

$$p = -3q/4 + 180$$

$$q/2 + 30 = -3q/4 + 180$$

$$\frac{5q}{4} = 150$$

$$q = 120 \text{ Adet}$$

$$p = \frac{q}{2} + 30 = \frac{120}{2} + 30 = 60 + 30 = 90 \text{ TL}$$

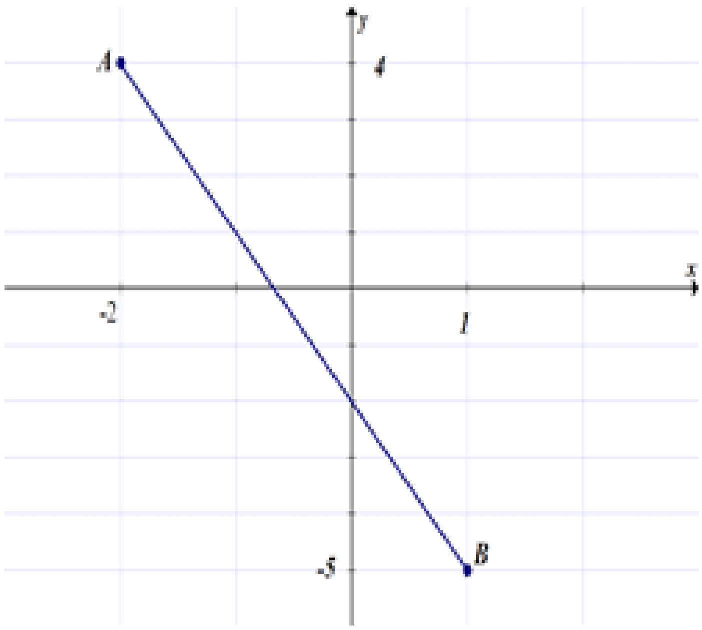
2) $(-2, 5)$ ve $(1, 2)$ noktalarından geçen doğrunun eğimini ve denklemini bulunuz.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - (5)}{1 - (-2)}$$

$$m = \frac{-3}{3} = -1$$

$y = mx + n$ biçiminde doğru denklemini yazılırsa; $m = -1$ olduğundan;
$y = -x + n$ olur. n değerini bulmak için herhangi bir nokta fonksiyonda yerine konur.
$2 = -1 + n \;\; \rightarrow \;\; n = 3$ çıkar, dolayısıyla doğru denklemi $y = -x + 3$ olur.

3) Aşağıdaki grafikte A, B noktalarından geçen doğrunun eğimini inceleyiniz.



$A(-2,4)$ ve $B(1,-5)$ noktalarından geçen doğru denklemini oluşturulmalıdır.
Doğru sola yatık bir doğru olduğu için negatif eğime sahiptir.

Ayrıca noktalar dikkatle incelenirse, x değişkeni -2'den 1'e 3 birim artarken; y değişkeni, 4'ten -5'e 9 birim azalmıştır. Bir değişken artarken diğeri azalıyor ise, doğru negatif eğime sahip olur.

$$m = -\frac{9}{3} = -3$$

olarak bulunur.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde doğrusal fonksiyonlar, doğrunun eğimi, pozitif eğimli sağa yatık doğrular, negatif eğimli sola yatık doğrular, doğru denklemi oluşturma ve doğruların kesişimi anlatılmıştır. Parçalı Doğrusal fonksiyonlarla ilgili uygulama yapılmıştır.

Bölüm Soruları

1) $4x + 3y = 12$ doğrusunun eğimi kaçtır?

a) $-1/3$ b) $1/3$ c) $4/3$ d) $-3/4$ e) $-4/3$

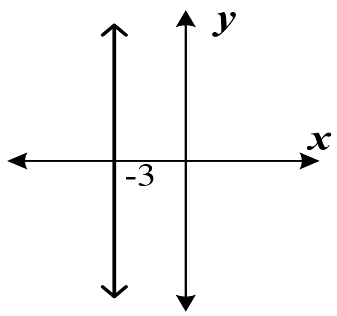
2) $(3, 5)$ ve $(5, 9)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi kaçtır?

a) 2 b) 1 c) -1 d) -2 e) -3

3) Eğimi -2 olan ve $(0, 3)$ noktasından geçen doğrunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y = 2x + 3$ b) $y = 3x + 2$ c) $y = -2x + 3$ d) $y = 2x$ e) $y = -2x - 3$

4) Grafikte gösterilen doğrunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?



a) $x = -3y$ b) $x = 3$ c) $y = 3x$ d) $x = -3$ e) $x = -1/3$

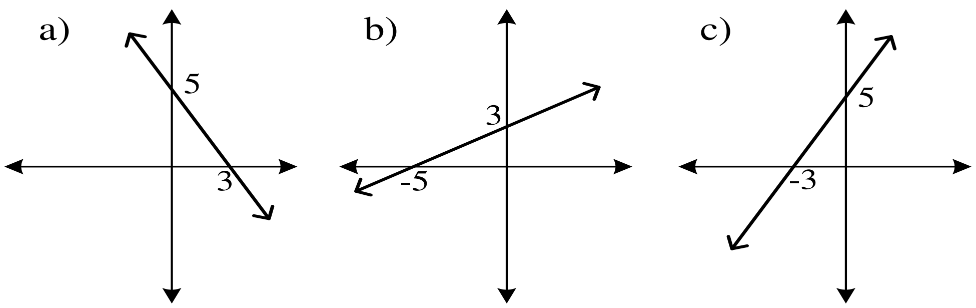
5) Aşağıdaki doğrulardan hangisi y-eksenine paraleldir?

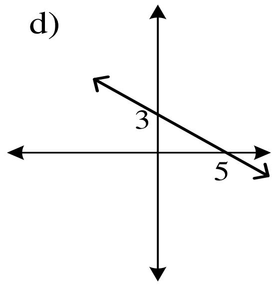
a) $x = 3$ b) $y = -3$ c) $y = -3x$ d) $y = 2x$ e) $y = 3 + x$

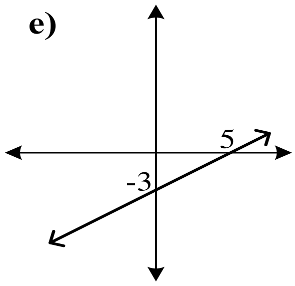
6) $y = 3x - 5$ doğrusu ile $y = -2x + 10$ doğrularının kesişim noktası hangisidir?

a) $(3, 0)$ b) $(4, 3)$ c) $(3, 4)$ d) $(0, 4)$ e) $(5, 3)$

7) $3x - 5y = 15$ doğrusunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?







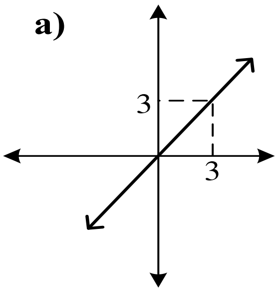
8) $3x - y + 4 = 0$ ve $ax + 2y - 3 = 0$ doğrularının birbirine paralel olması için a ne olmalıdır? **Not:** Birbirine paralel olan doğrular aynı eğime sahiptir.

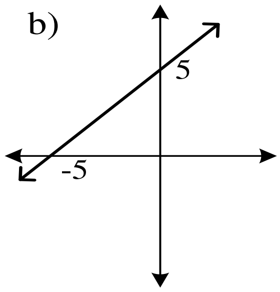
a) -1 b) -2 c) -3 d) -6 e) $-2/3$

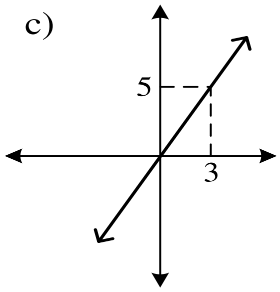
9) Bir ürünün gelir fonksiyonu $R = 5q$ ve maliyet fonksiyonu $TC(q) = 3q + 1000$ ise başabaş noktasında üretim (satış) düzeyi nedir? **Not**: ($R = TC$) uygulanmalıdır.

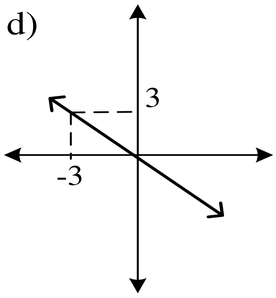
a) 100 b) 250 c) 500 d) 1000 e) 2000

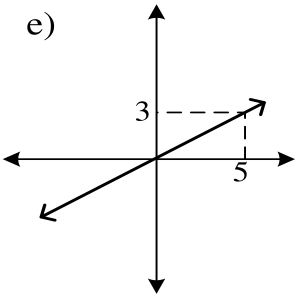
10) Aşağıdakilerden hangisi birim fonksiyonun grafiğidir?











Cevaplar

1) e, 2) a, 3) c, 4) d, 5) a, 6) c, 7) e, 8) d, 9) c, 10) a

6. PARABOLLER, İKİNCİ DERECEDEN FONKSİYONLAR

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

6.1. İkinci Dereceden (Kuadratik Fonksiyonlar)
6.2. Tepe Noktasının Elde Edilişi
6.3. Parabol Grafikleri
6.4. İkinci Derceden Fonksiyon Problemleri

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1) İkinci dereceden polinom fonksiyon nedir?

2) Parabol grafiği nasıl çizilir?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	**Kazanım**	**Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği**
İkinci Dereceden Fonksiyon	İkinci dereceden fonksiyon nedir?	Okuyarak, fikir yürüterek, araştırarak
Paraboller	Parabolü tanımak	Okuyarak, fikir yürüterek, tekrar ederek
Grafik Çizimi	Parabol grafiklerinin çizimi	Okuyarak, fikir yürüterek, örnek uygulama yaparak

Anahtar Kavramlar

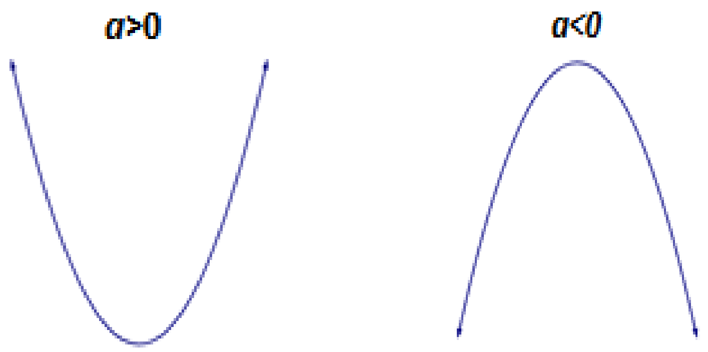
- İkinci Dereceden Fonksiyon
- Parabol
- Parabolik Eğri Çizimi

Giriş

$a \neq 0$ ve $a, b, c \in R$ olmak üzere, $f : R \rightarrow R$ tanımlanan $f(x) = ax^2 + bx + c$ biçimindeki fonksiyonlara ikinci dereceden tek değişkenli fonksiyonlar denir.

Örneğin, $f(x) = 3x^2 - 5x + 15$ fonksiyonu ikinci dereceden tek değişkenli bir fonksiyondur.

İkinci dereceden fonksiyonun analitik düzlemdeki görüntüsüne **parabol** denir. Parabol, düzgün tel parçasının uçlarından tutularak bükülmesiyle oluşan, aşağıdaki gibi kolları yukarıya doğru ya da aşağıya doğru olan bir eğridir. Verilen fonksiyonda $a > 0$ olduğunda parabolün kolları yukarı doğru, $a < 0$ olduğu durumda kolları aşağı doğru olur.



Şekil 6.1: Parabol Kollarının Durumu

Bir parabol her zaman y eksenini bir noktada keser; ancak x eksenini bir noktada, iki noktada kesebilir veya x eksenini hiç kesmeyebilir.

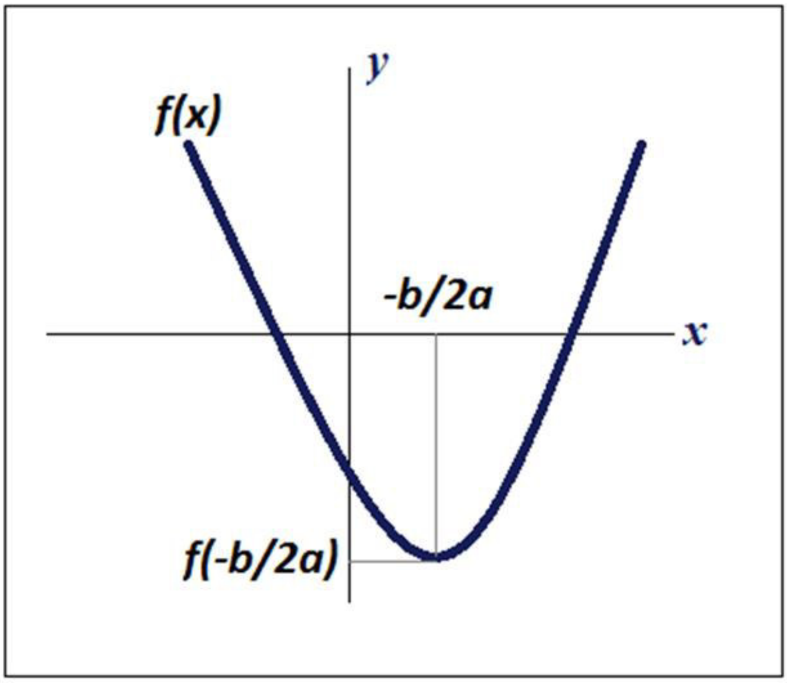
Yukarıdaki şekillerden de anlaşılacağı gibi her parabolün bir tepe noktası vardır. Kolları yukarı doğru olan paraboller bir minimum noktasına, kolları aşağı doğru olan paraboller bir maksimum noktasına sahiptirler. Bu tepe noktasının bulunduğu eksene göre paraboller her zaman simetriktirler.

6.1 Parabolün Tepe Noktası

$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun tepe noktası;

Apsisi $x = -\frac{b}{2a}$ ile bulunur, ordinatı ise (y değeri) bulunan apsis değeri fonksiyonda x değişkeni yerine konularak elde edilir.

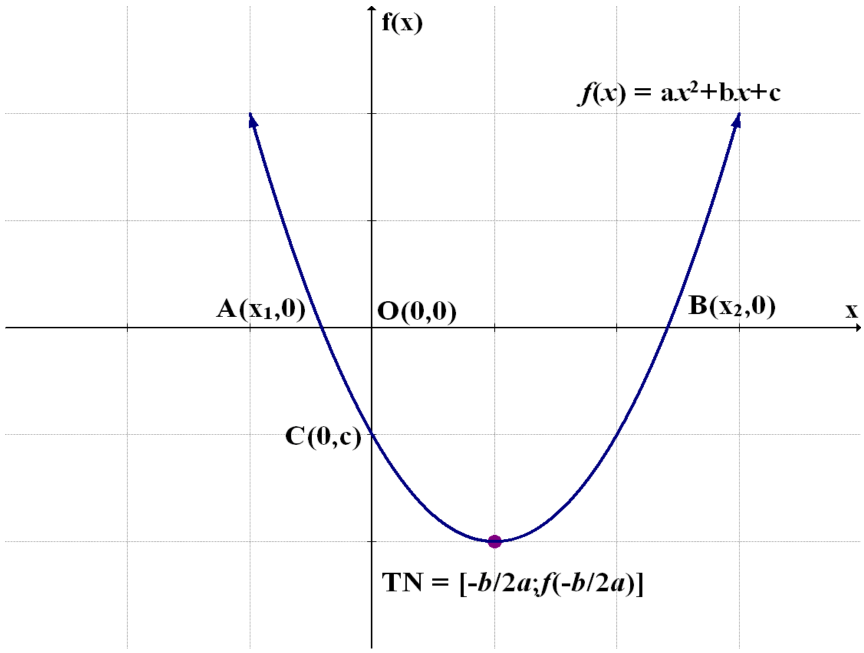
$$\text{Tepe Noktası} = \left[-\frac{b}{2a};\ f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]$$



Şekil 6.2: Parabolde Tepe Noktası

6.2 Parabolün Eksenleri Kestiği Noktalar

Önceki derslerden de hatırlıyoruz ki bir fonksiyonun y eksenini kestiği noktayı bulmak için, bu hâlde $x = 0$ olacağından, fonksiyonda x yerine 0 değeri konularak elde edilir. Benzer şekilde fonksiyonun x eksenini kestiği nokta ya da noktaları bulmak için fonksiyon 0 değerine eşitlenir [$f(x) = y = 0$]. Aşağıda grafikte görüldüğü gibi parabol; y eksenini C noktasında, x eksenini ise A ve B noktalarında kesmektedir.



Şekil 6.3: Parabolün Eksenleri Kestiği Noktaların Gösterimi

Parabolün y eksenini kestiği nokta için;
$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunda 0 değeri yerine konursa $f(0) = a.0^2 + b.0 + c = c$ olur ve parabol her zaman y eksenini $(0\,,c)$ noktasında keser. Buradan da anlaşılıyor ki c değeri 0 olan ikinci dereceden bir fonksiyonun grafik düzlemdeki eğrisi mutlak orijin noktasından geçecektir. Pozitif olduğunda x ekseninin yukarısında bir noktada, negatif olduğunda x ekseninin aşağısında bir yerde y eksenini kesecektir.

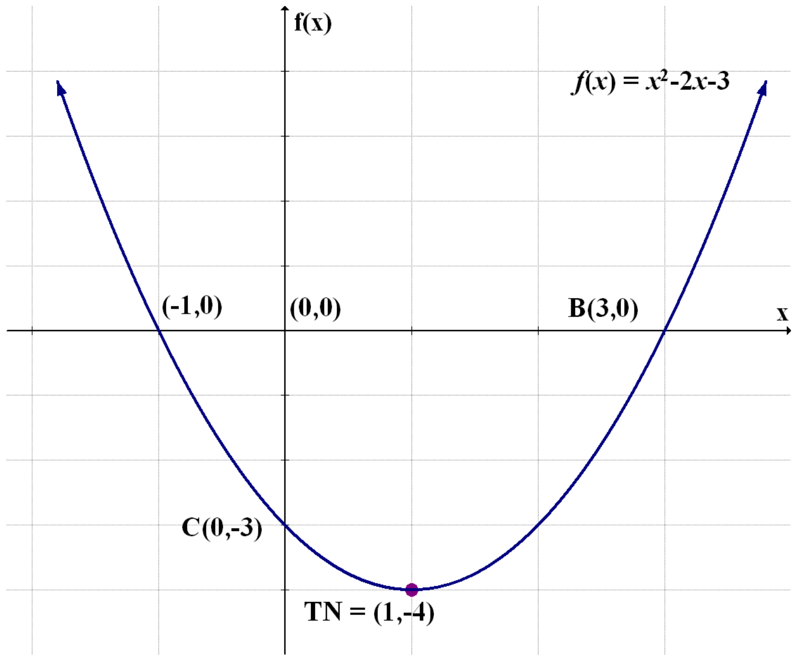
Parabolün x eksenini kestiği nokta için;
$ax^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c} = 0$ denklemi oluşur. İkinci bölümden hatırlıyoruz ki ikinci dereceden tek değişkenli bir denklemin çözümü olmayabilir (kök yok), tek çözümü olabilir (iki eşit kök, katlı kök) veya iki farklı çözümü olabilir (iki kök). $ax^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c} = 0$ denkleminin çözümüne bakılacak olursa;

- $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ise, parabol O_x eksenini farklı iki noktada keser.
- $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ise parabol O_x eksenini kesmez.
- $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ise, parabol O_x eksenine teğettir.

Genel olarak çözümleri bulmak için;

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

formülü kullanılır.
Örnek:
$f(x) = x^2 - 2x - 3$ fonksiyonunun grafiğini çizmek istersek;



Şekil 6.4: Parabolün Grafiği

6.3 Parabol kollarının Açıklığı

$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunda a değerinin 0 olması durumunda fonksiyon ikinci derece olmaktan çıkıp doğrusal fonksiyon durumuna gelir. Dolayısıyla fonksiyonun ikinci dereceden fonksiyon olabilmesi için a değeri 0 olmamalıdır. Fonksiyondaki bu a değerinin pozitif veya negatif olması parabolün kollarının yukarı ya da aşağı doğru gittiğine, a değerinin büyüklüğüne göre kollarının açılıp kapandığına işaret eder.

a değeri pozitif olarak ne kadar küçükse, kollar o kadar açılacak, ne kadar büyük olursa y eksenine doğru kapanacaktır. a değerinin büyük olması fonksiyonu daha hızlı değiştirecektir. Aşağıdaki şekilde a'nın aldığı çeşitli değerlere göre parabol kollarının ne şekilde değişim gösterdiği anlatılmaktadır. $|a|$ büyüdükçe kollar daralır. Buna göre, aşağıdaki parabollere göre, f deki x^2'nin katsayıları içten dışa doğru 3, 1 ve 0.5 değerlerinden oluşmakta, diğer grafikte ise -3, -1 ve -0.5 değerlerinden oluşmaktadır.

$f(x) = x^2$ fonksiyonu için fonksiyonun değişimi incelenirse;

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	∞
$f(x)$	∞	9	4	1	0	1	4	9	∞

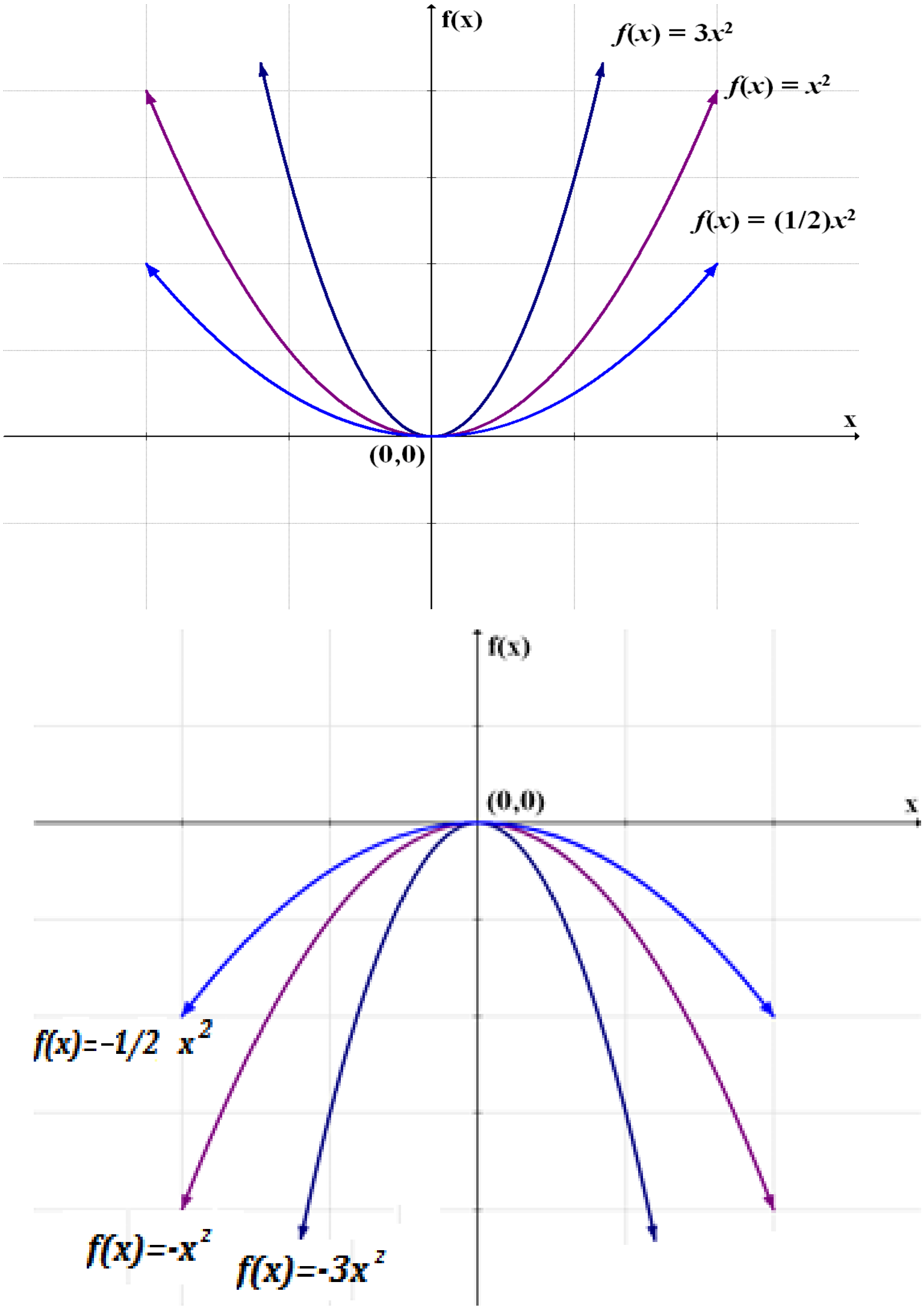
$f(x) = 3x^2$ fonksiyonu için fonksiyonun değişimi incelenirse;

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	∞
$f(x)$	∞	27	12	3	0	3	12	27	∞

$f(x) = \frac{1}{2}.x^2$ fonksiyonu için fonksiyonun değişimi incelenirse;

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	∞
$f(x)$	∞	9/2	2	1/2	0	1/2	2	9/2	∞

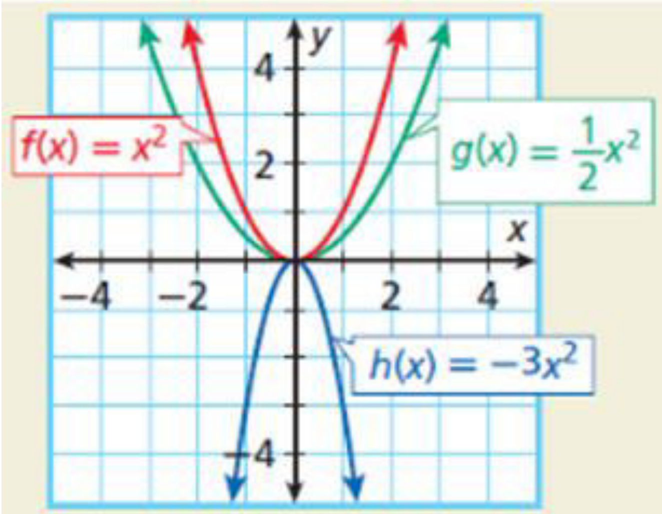
a değerlerinin negatif olması durumunda da benzer durumlar görülecektir. Tek fark parabol kolları aşağı doğru gidecektir.



Şekil 6.5: Parabollerde Kol Açıklığı

Örnek:

$y = x^2$ ve $y = x^2/2$ fonksiyonlarının grafiği aşağıdaki olup parabol kollarının açıklığı göslenebilir. $y = -3x^2$ donksiyonunnun kollarının aşağı doğru olduğu ve parabol kollarının y eksenine daha yakın olduğu görülür.

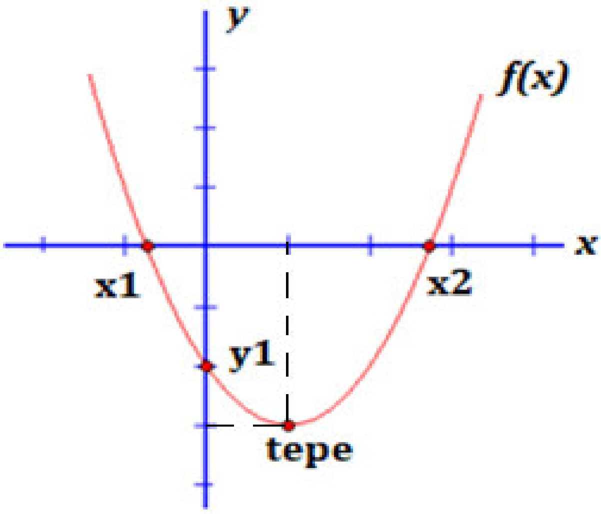


$f(x) = ax^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}$ fonksiyonunun grafiği çizilirken

1) a'nın işaretine bakılarak parabolün kollarının yönü belirlenir.
2) Fonksiyonun eksenleri kestiği noktalar bulunur.
3) Fonksiyonun tepe noktası bulunur.
4) Grafiği çizilir.

6.4 Parabol Denkleminin Yazılması

6.4.1 Parabolün Yatay Eksenini Kestiği Noktalar ve Başka Bir Nokta Biliniyorsa



Şekil 6.6: Parabol Grafiği

$y = f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ (1)

Burada a değerini bulmak için, parabol üzerindeki herhangi bir noktanın değerleri (1) denkleminde yazılır.

Örnek:

Kökleri 1 ve 5 olan yani x-eksenini $x = 1$ ve $x = 5$'te kesen parabolün denklemini bulunuz.

Çözüm:

$$y = f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$y = f(x) = a(x-1)(x-5)$$
$$y = ax^2 - 6ax + 5a$$

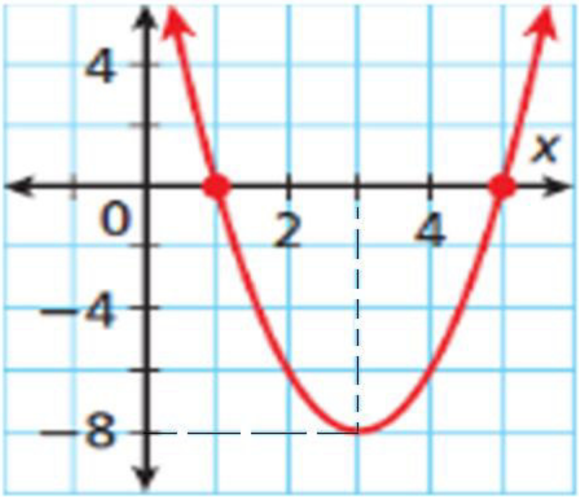
Tepe noktası $(3,-8)$ noktası olduğuna göre; bu değerler parabol denkleminde yerine konursa;

$$-8 = a(3)^2 - 6a(3) + 5a$$
$$-8 = 9a - 18a + 5a$$
$$-8 = -4a \rightarrow a = 2$$

Fonksiyon;

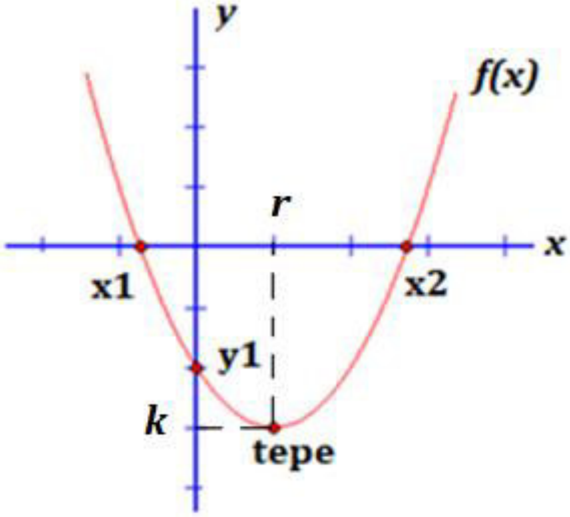
$$y = f(x) = 2(x-1)(x-5)$$
$$y = 2x^2 - 12x + 10$$

Fonksiyon grafiği aşağıdaki gibi olur.



Şekil 6.7: $y = 2x^2 - 12x + 10$ fonksiyonu

6.4.2 Parabolün Tepe Noktası ve Bir Diğer Noktası Biliniyorsa



Şekil 6.8: Parabolde Tepe noktası biliniyor

$y = f(x) = a(x-r)^2 + k$ (2)

Burada a değerini bulmak için, parabol üzerindeki herhangi bir noktanın değerleri (2) denkleminde yazılır.

Örnek:

Tepe noktası (3,-5) olan ve x-eksenini $x = 5$ noktasında (5,0) kesen parabolün denklemini yazınız.

Çözüm:

Tepe noktası formülünde verilen değerler yerine konursa;

$$y = f(x) = + k$$
$$y = f(x) = a(x - 3)^2 - 8$$

Bir değer parabol noktası (5,0) olduğuna göre;

$$a(5 - 3)^2 - 8 = 0$$
$$a.4 = 8$$
$$a = 2$$

Dolayısıyla parabol denklemi;

$$y = f(x) = 2(x - 3)^2 - 8$$

Biçiminde de yazılabilir.

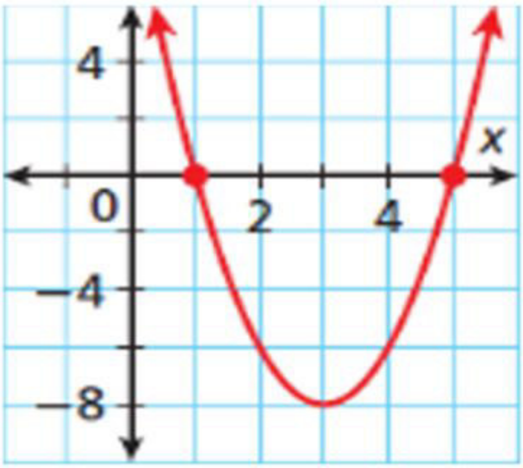
$$a = 2$$

Fonksiyon;

$$y = f(x) = 2(x - 3)^2 - 8$$
$$y = f(x) = 2(x^2 - 6x + 9) - 8$$
$$y = 2x^2 - 12x + 18 - 8$$
$$y = 2x^2 - 12x + 10$$

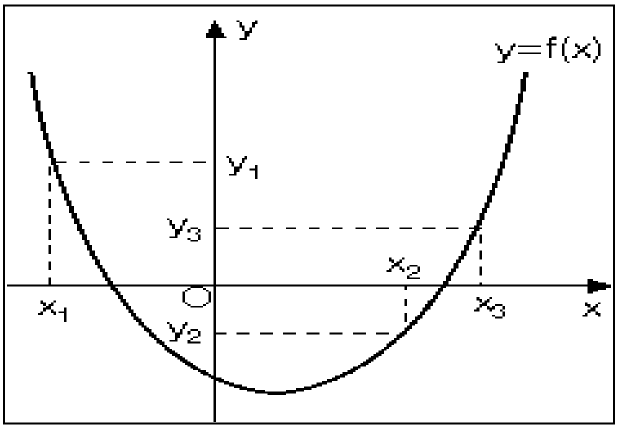
Önceki örnekte olduğu gibi aynı parabol;

$y = f(x) = 2(x - 1)(x - 5)$ olarak da gösterilebilir. Fonksiyon grafiği aşağıdaki gibi olur.



Şekil 6.9: $y = f(x) = 2(x - 3)^2 - 8$ fonksiyonu

6.4.3 Parabolün Geçtiği Üç Nokta Biliniyorsa



Şekil 6.10: Parabolün Geçtiği Üç Nokta

$$y_1 = ax_1{}^2 + bx_1 + c$$
$$y_2 = ax_2{}^2 + bx_2 + c$$
$$y_3 = ax_3{}^2 + bx_3 + c$$

Bu üç denklemi ortak çözerek a, b, c bulunur.

6.5 Parabol ile Doğrunun Kesişimi

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolü ile
$y = g(x) = mx + n$ doğrusunu ortak çözelim.

$$f(x) = g(x)$$
$$ax^2 + bx + c = mx + n$$
$$ax^2 + (b - m)x + c - n = 0 \ldots (1)$$

(1) denkleminin kökleri (varsa) doğru ile parabolün kesiştiği noktaların apsisleridir.
Buna göre, (1) denkleminde;

- $\Delta > 0$ ise, parabol doğruyu farklı iki noktada keser.
- $\Delta < 0$ ise, parabol ile doğru kesişmez.
- $\Delta = 0$ ise, parabol doğruya teğettir.

$y = ax^2 + bx + c$ parabolü ile $y = dx^2 + ex + f$ parabolünün düzlemdeki durumu incelenirken yukarıdakine benzer biçimde işlemler yapılır.

Uygulama

Bir sitede birbirinin benzeri 360 daire bulunmaktadır. Site yönetimi kurulu bu daireleri aylık 600-900 TL bedel ile kiraya verecektir. Kira bedeli 600 TL olarak belirlendiğinde bütün daireler kiralanabilmektedir. Yönetim kurulu apartman dairelerinin aylık kira bedelini 50 TL artırması durumunda 20 kiracı daireyi kiralamaktan vazgeçmektedir. Kira bedeli ile kiraya verilecek apartman dairelerinin sayısı arasında doğrusal bir ilişki olduğuna göre yönetim kira gelirlerini maksimum yapabilmek için kira bedelini kaç TL olarak belirlemelidir? Bu durumda kaç daire kiralanmış olacaktır?

Çözüm:

p	600	650	700	**750**	800	850	900
q	360	340	320	300	280	260	240
$R = p.q$	216000	221000	224000	**225000**	224000	221000	216000

Yukarıdaki tablodan görüldüğü gibi toplam kira geliri önce artmakta ve daha sonra azalmaktadır. İkinici dereceden parabol eğrisi özelliği göstermektedir.

Çözüm 2:

$A(360, 600)$ $B(340, 650)$ gibi herhangi iki nokta seçersek;

Bu iki noktadan geçen doğru denklemini (dairelere olan talep denklemi) bulmak istersek:

$$\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2} \quad \rightarrow \frac{p - p_1}{p_1 - p_2} = \frac{q - q_1}{q_1 - q_2}$$

$$\frac{p - 600}{600 - 650} = \frac{q - 360}{360 - 340}$$

$$\frac{p - 600}{-50} = \frac{q - 360}{20}$$

$$\frac{p - 600}{-5} = \frac{q - 360}{2} \quad \rightarrow$$

$$p - 600 = \frac{-5q + 1800}{2}$$

$$p = \frac{-5q}{2} + 1500$$

$$R = p.q = \left(\frac{-5q}{2} + 1500\right)q = \frac{-5q^2}{2} + 1500q$$

Görüldüğü gibi gelir denklemi ikinci dereceden bir denklem olmaktadır.

Gelirin maksimum nokta ise parabolün tepe noktasıdır. Tepe noktasını bulmak istersek;

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-1500}{2.(\frac{-5}{2})} = 300$$

$$q = 300 \quad \text{iken} \quad p = \frac{-5.300}{2} + 1500 \quad \rightarrow \quad p = 750 \text{ TL}$$

$$R = 300.750 = 225.000 \text{ TL}$$

Uygulama Soruları

1) $y = x^2 - 2x - 3$ fonksiyonunun eksenleri kestiği nokta ya da noktaları ve tepe noktasını bulunuz.

Çözüm:

$y = ax^2 + bx + c$ ikinci dereceden fonksiyonun genel hâli olduğuna göre bu soruda;

$a = 1$, $b = -2$ ve $c = -3$'tür.

$a > 0$ olduğu için parabolün kolları yukarı doğru olacaktır.

y- eksenini kestiği noktayı bulmak için x yerine 0 değeri verilirse,

$$y = 0^2 - 2.0 - 3 = -3$$

çıkar.

Fonksiyon y- eksenini $(0, -3)$ noktasında keser.

x- eksenini kestiği noktayı (noktaları) bulmak için y yerine 0 değeri verilirse,

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x+1)(x-3) = 0$$

$$x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1$$

$$x - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 3$$

Tepe noktası ise;

$$T.N. = \left[\frac{-b}{2a}; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right]$$

$$T.N. = \left[\frac{-(-2)}{2.1}; f(1)\right]$$

$$\text{Tepe Noktasının Koordinatları} = [1, -4]$$

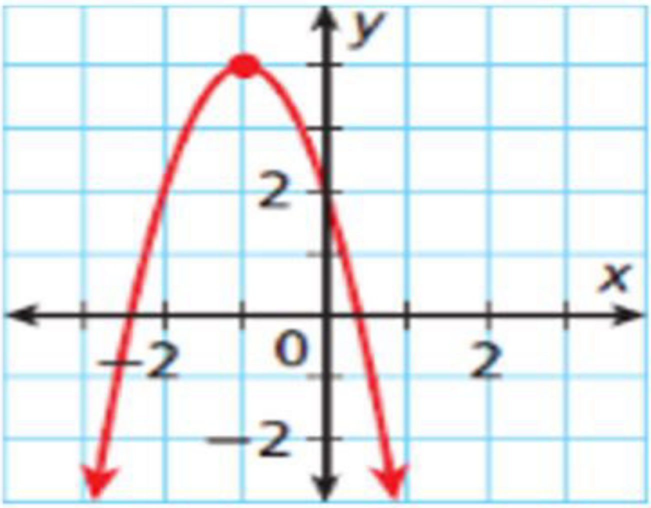
olarak bulunur, dolayısıyla fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibi olur.

2)

$$y = \frac{-16}{9}\left(x - \frac{1}{2}\right).(x + \frac{5}{2})$$

parabolünün grafiğini çiziniz.

Çözüm:



3) $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$ fonksiyonunun x-eksenini kestiği noktaları (kökleri) bulunuz.

Çözüm:

Kökleri bulmak için;

$3x^2 - 7x + 2 = 0$ denklemini çözmeliyiz.

x -2

$3x$ -1 $(x-2)(3x-1) = 0$

$x_1 = 2$ ve $x_2 = 1/3$

4) Aşağıda verilen fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

$$f(x) = \frac{x^2}{4} + 1$$

Çözüm:

$a = 1/4$, kollar yukarı doğru

$x =$ 0 için $y = 1$

$x = 2$ için $y = 2$

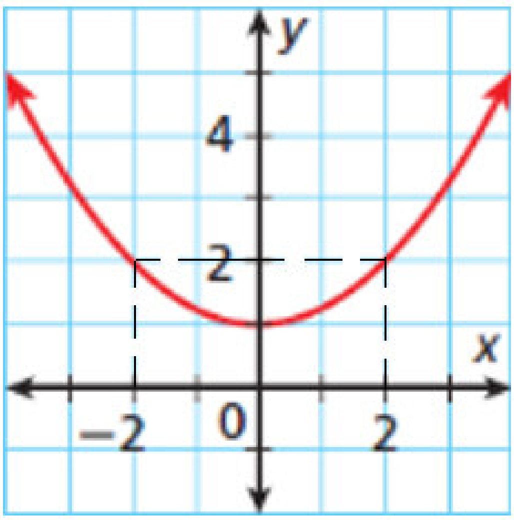
$x = -2$ için $y = 2$

Fonkjsiyon y-eksenini kesmez çünkü

$$\frac{x^2}{4} + 1 = 0$$

denkleminin çözümü yoktur.

$x^2 = -4$ (Karesi -4 olan reel sayı yoktur.)

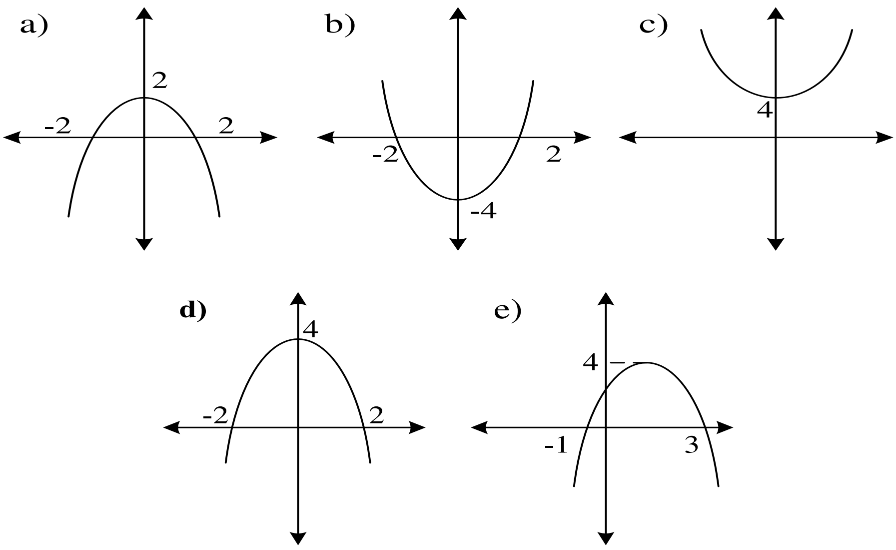


Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Beşinci bölümde ikinci dereceden polinom fonksiyonlar (kuadratik fonksiyonlar) incelenmiştir. Parabol kol açıklığı, parabolün eksenleri kestiği noktalar, parabolün tepe noktasının nasıl elde edileceği öğretilmiştir. Parabol grafiklerinin çizimine örnekler verilmişitir.

Bölüm Soruları

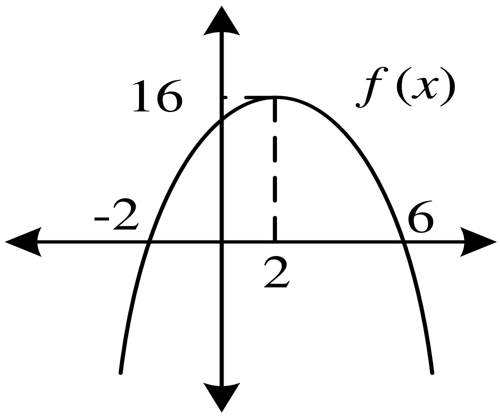
1) $f(x) = -x^2 + 4$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



2) $y = -3x^2 + 6x + 4$ fonksiyonunun tepe noktasının apsisi aşağıdakilerden hangisidir?

a) -1 b) 1 c) 2 d) 4 e) -5

3) Aşağıda grafiği verilen fonksiyonun matematiksel ifadesi hangisidir?

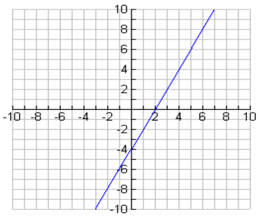


a) $y = -x^2 + 4x$ b) $y = x^2 - 4x$ c) $y = -x^2 + 4x - 12$

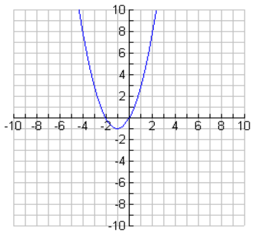
d) $y = -x^2 + 4x + 16$ e) $y = -x^2 + 4x + 12$

4) Aşağıdakilerden hangisi ikinci dereceden bir fonksiyonun grafiğidir?

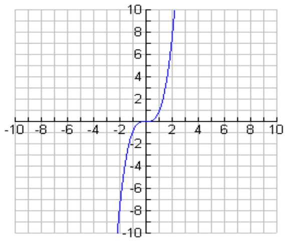
a)



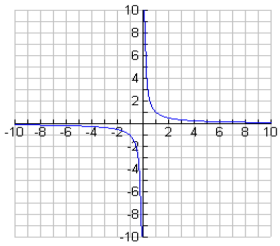
b)



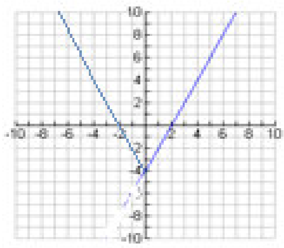
c)



d)



e)



5) $y = x^2 + 8x + 16$ fonksiyonunun minimum noktası aşağıdakilerden hangisidir?

a) $(0, 4)$ b) $(-4, 1)$ c) $(0, -4)$ d) $(4, 0)$ e) $(-4,\ 0)$

6) x-ekseni üretim (satış) miktarını (q), y-ekseni fiyatı (p) göstermek üzere, bir ürünün arz fonksiyonu $p = f(q) = 2q + 1$ ve talep fonksiyonu $p = f(q) = -q^2 + 25$ ise pazar denge noktasındaki üretim (satış) miktarı nedir?

a) -4 b) 0 c) 1 d) 4 e) 6

7) $y = -2x^2 + 5x + a$ fonksiyonunun $(1, 5)$ noktasından geçmesi için a hangi değeri almalıdır?

a) 5 b) 4 c) 2 d) -1 e) -3

8) $y = 2x^2 - 5x$ fonksiyonu x-eksenini hangi apsis değerlerinde keser?

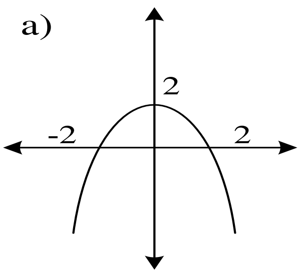
a) $\{0,\ 5/2\}$ b) $\{-1, 0\}$ c) $\{2, 5/2\}$ d) $\{0, 1\}$ e) $\{-5/2, 7\}$

9) $y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonu y-eksenini kaç noktada keser? $(a, b, c\ \in R)$.

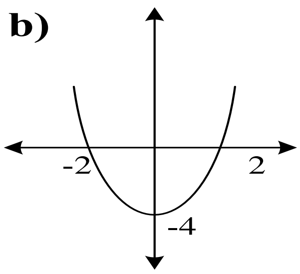
a) Kesmez b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

10) $f(x) = x^2 - 4$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

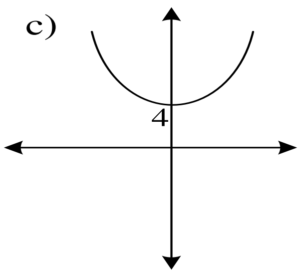
a)

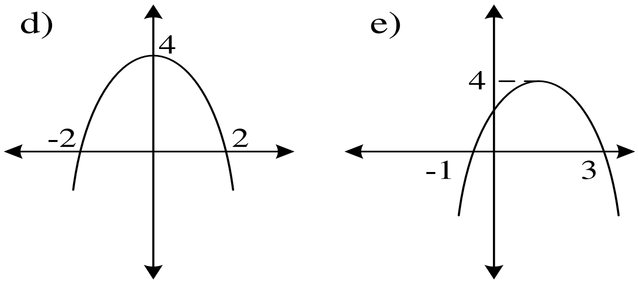


b)



c)





Cevaplar

1) d, 2) b, 3) e, 4) b, 5) e, 6) d, 7) c, 8)a, 9) e, 10) b.

7. FONKSİYONLARIN İKTİSADİ UYGULAMALARI

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

7.1. Doğrusal Fonksiyon uygulamaları
7.2. Toplam Gelir, Toplam Maliyet Fonksiyonları
7.3. Kâr Fonksiyonu
7.4. Arz ve Talep Fonksiyonları

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1) Arz ve talep denklemi nedir?
2) Gelir, gider ve kâr denklemleri nasıl oluşturulur?
3) Hangi tür denklemler mevcuttur?
4) Tüketim ve Tasarruf Hesabı nasıl yapılır?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	**Kazanım**	**Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği**
Toplam Gelir Toplam Maliyet Kar Fonksiyonu	Toplam Gelir Toplam Maliyet Kar Fonksiyonlarını tanımlama	Okuyarak, tekrar ederek, fikir yürüterek
Başabaş Analizi	Analizi kavrama	Okuyarak, tekrar ederek, fikir yürüterek
Arz Talep Fonksiyonu	İktisatta arz ve talep kavramlarını anlamak	Okuyarak, fikir yürüterek, uygulama yaparak
Üretim ve Tüketim Fonksiyonu	Tüketim Fonksiyonunu kavramak	Okuyarak, fikir yürüterek, uygulama yapmak

Anahtar Kavramlar

- Toplam Gelir Denklemi
- Toplam Maliyet Denklemi
- Kâr Denklemi
- Başabaş Analizi
- Başabaş Noktası (Sıfır Kâr Noktası)
- Arz ve Talep Denklemleri
- Pazar Denge Noktası
- Üretim Fonksiyonu
- Tüketim Fonksiyonu

Giriş

İktisat ve işletme alanında karşımıza gelen problemlerin modellenmesinde çoğunlukla matematik ve istatistikten yararlanılır. Bu problemlerin modellenmesinde genellikle doğrusal, ikinci dereceden, üstel ve logaritmik fonksiyonlar sıkça kullanılır. Bu bölümde işletme iktisatta sıkça karşımıza gelen toplam maliyet, toplam gelir, toplam kar, üretim ve tüketim fonksiyonu ve arz ve talep fonksiyonları ayrıntılı olarak işlenecektir.

Toplam Sabit Maliyet (FC); üretim miktarından bağımsız olan firmanın hiç üretim yapmasa dahi katlanmak zorunda olduğu maliyetlerdir. (Kira, Demirbaş alımı, Amortisman ödemeleri vb.) TSM eğrisi üretim miktarından etkilenmediği için yatay eksene paralel bir doğru şeklindedir.

Ortalama Sabit Maliyet (FC/q) ; Toplam Sabit Maliyetin üretim miktarına bölünmesiyle bulunur. OSM eğrisi üretim miktarındaki artışa bağlı olarak giderek azaldığı için negatif eğilimli bir eğri şeklindedir.

Toplam Değişken maliyetler (VC) ; Firmanın kısa dönemde üretimini sürdürebilmesi için üretim faktörlerine yaptığı ödemelerdir. İşçilik ücretleri, hammadde, eletrik-su giderleri gibi. Hiç üretim yapılmazsa toplam değişir maliyetler sıfırdır.

Toplam değişken maliyetler üretilen mal miktarıyla artar.

Ortalama Değişken Maliyet (VC/q), Toplam Değişken Maliyetin üretim miktarına bölünmesiyle bulunur. ODM önce azalan, minimuma ulaştıktan sonra artan bir eğridir. ODM firmanın üretimi ve kapasite kullanımı arttıkça faktör verimliliğindeki artışa bağlı olarak azalır, daha sonra faktör verimliliği azaldığında tekrar artar.

Ortalama maliyet (OM), her üretim düzeyinde toplam maliyetin üretim miktarına bölünmesiyle bulunur.

Toplam Kâr: Bir firma sahibinin üretim faaliyetine girişmesinin sebebi maksimum kâr elde etmek olduğu için firmasının toplam maliyet ile toplam gelir arasındaki farkı kendi lehine olacak şekilde arttırmaya çalışacaktır. Toplam Gelir firmanın ürettiği mal ve hizmet miktarının piyasa fiyatı ile çarpımından elde edilen sonuçtur;

$$\textbf{Toplam Kâr } (\boldsymbol{P}) = \textbf{Toplam Gelir } (\boldsymbol{R}) - \textbf{Toplam Maliyet } (\boldsymbol{TC})$$

Üretim Fonksiyonu: Firmanın, belli oranlarda emek (E), sermaye (S), teknoloji (T) gibi üretim faktörlerini bir araya getirip üretim faaliyetinin sonunda ürettiği mal miktarı Ü, kullanılan bu üretim faktörlerinin miktarına bağlı olarak değişeceğine göre, üretim fonksiyonunu şu şekilde formüle edilebilir. Yani; ***üretim fonksiyonu***, belli bir teknik bilgi düzeyinde, belli bir miktarda mal elde etmek için kullanılacak gidilerin (input) miktarlarını ve bu girdiler arasındaki bileşim oranının ne olacağını gösteren matematiksel bir ilişkidir.

7.1 Toplam Gelir, Toplam Maliyet ve Kar Fonksiyonları

Kar amacı gütmeyen işletmelerin dışında kalan tüm işletmelerin temel amacı kar elde etmektir. İşletmeler ürün veya hizmet ortaya çıkarabilmek için çeşitli maliyetlere katlanırlar. Bu ürettikleri ürün ya da hizmeti ihtiyaç sahibi tüketicilere satarak gelir elde ederler.

Bir birim ürün veya hizmetin elde edilmesi için harcanan üretim faktörleri (işçilik, sermaye, hammadde vs.) toplamına *birim maliyet* (unit cost) denir. Ürünün birim maliyeti c (cost) ile gösterilir. Bir işletmenin ürettiği mal ve hizmetler için katlanılan maliyetin genelde iki kaynağı bulunmaktadır. Bunlardan birincisi *toplam değişken maliyet* (Variable Cost-VC), ikincisi ise *toplam sabit maliyet* (Fixed Cost-FC)'tir. Bu iki maliyet türünün, üretilen mal birimine düşen payına *ortalama maliyet* (average cost-AC) denilir. Bir işletmede en son üretilen birimin maliyetine ise marjinal maliyet (MC) adı verilmektedir. Maliyet kelimesi, çeşitli gayelere göre bedel ve karşılık anlamında kullanılmakla birlikte, çoğunlukla bir işletmeye belli bir mal, hizmet veya faktör şeklinde sunulan girdilerin, işletmeye olan yükü anlamını taşır. Sermaye maliyeti, işçilik maliyeti, hammadde maliyeti, enerji maliyeti gibi.

Bir işletmede belirli bir dönemde (ayda, 3 ayda, 6 ayda, yılda) üretilen ürün miktarı q ile gösterilirse;

Toplam Değişken Maliyet;

$$\boldsymbol{VC = c.q}$$

denklemi ile hesaplanır. Bu denklemden de anlaşıldığı gibi üretim miktarı arttıkça Toplam Değişken Maliyet de artacaktır.

Belirli bir dönemde oluşan üretimden bağımsız maliyetlerin toplamı olan Sabit Maliyetler toplamı (FC) Toplam Değişken Maliyete eklenirse, belirli bir dönemde q adet üretim için Toplam Maliyet (Total Cost - TC) elde edilmiş olur.

Toplam Maliyet; Toplam Değişken Maliyete, Sabit Giderler Toplamının (FC) eklenmesi ile elde edilir.

$$\boldsymbol{TC = VC + FC}$$

ve $VC = c.q$ olduğundan,

$$\boldsymbol{TC = c.q + FC}$$

olur. Tekrar etmek gerekirse, Toplam Maliyet hesap edilirken, ürünün birim maliyeti ile o dönemde üretilip satılan ürün miktarı çarpılır, üzerine sabit maliyet eklenir.

Belirli bir dönemde ortaya çıkan Ortalama Maliyetin bulunması istenirse, o dönemde oluşan toplam maliyetin yine o dönemde üretilen üretim miktarına bölünmesi ile hesap edilir.

$$\boldsymbol{AC = \frac{TC}{q}}$$

Yine belirli bir dönemde üretilen ürün ve hizmetlerin satışından elde edilen gelire **toplam gelir** denir. İşletmeler ürettikleri ürünün birim maliyeti üzerine bir miktar daha katkı koyarak ürünün satış fiyatını (etiket fiyatı) (price - p) belirlerler.

Belirli bir dönemde işletmede oluşan **Toplam Gelir**; ürünün birim satış fiyatı ile satılan miktarın çarpımı ile bulunur. Sabit gelirin olmadığı, sadece üretimden (satıştan) elde edilen gelir,

$$\boldsymbol{R = p.q}$$

Toplam Gelirden, Toplam Maliyet çıkarılırsa, *Kar* denklemi elde edilir.

$$\boldsymbol{P = R - TC}$$

olur. Gelir ve maliyet terimleri açık olarak yazıldığında,

Kar Denklemi; Kar = Toplam Gelir-Toplam Maliyet

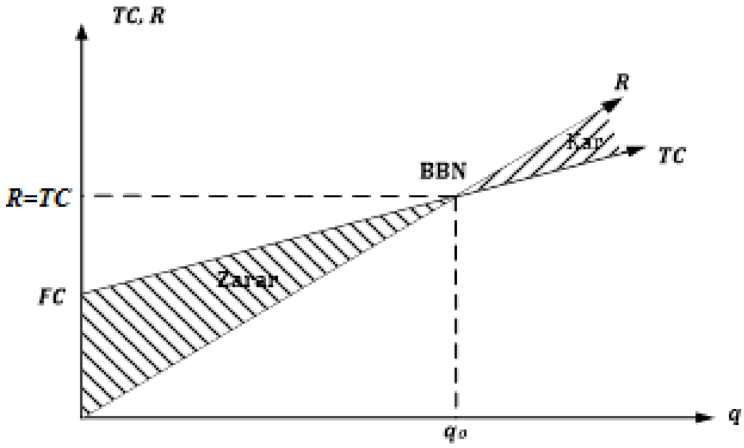
$$\boldsymbol{P = R - TC = p.q - (c.q + FC)}$$

$$\boldsymbol{P = (\,p - c\,).q - FC}$$

olarak elde edilir. Bu denklemdeki $(p - c)$ farkı, birim karı (katkı) göstermektedir.

7.2 Başabaş Analizi

Toplam Gelir ve Toplam Maliyet kavramları, Başabaş (sıfır kar) Noktasının belirlenmesinde önem arz eder.



Şekil 7.1: Başabaş Analizinin Grafik Gösterimi

Bu bölümde adı geçen işletme ve iktisat literatüründe sıkça kullanılan kavramlar ve bu kavramlara ilişkin semboller aşağıda listelenmektedir.

BBN: Başabaş noktası = **SKN**: Sıfır Kar Noktası

$\boldsymbol{q}$: üretim (satış miktarı veya ürüne olan talep miktarı, *quantity*)

$\boldsymbol{p}$: Ürünün birim satış fiyatı (etiket fiyatı; *price*)

$\boldsymbol{c}$: Ürünün birim maliyet (birim alış fiyatı, *unit cost*)

$\boldsymbol{R}$ veya $\boldsymbol{TR}$: Toplam Gelir (Kazanç, *Total Revenue*)

$\boldsymbol{C}$ veya $\boldsymbol{TC}$: Toplam Maliyet (Toplam Gider, *Total Cost*)

$\boldsymbol{VC}$: Toplam Değişken Maliyet (*Variable Cost*)

$\boldsymbol{AC}$: Ortalama Maliyet (*Average Cost*)

$\boldsymbol{FC}$: Toplam Sabit Maliyet (Sabit Giderler Toplamı, *Fixed Cost*)

$\boldsymbol{MR}$: Marjinal Gelir (*Marginal Revenue*)

$\boldsymbol{MC}$: Marjinal Maliyet (*Marginal Cost*)

$\boldsymbol{P}$: Kar (*Profit*)

Örnek:

Bir firma birim maliyeti 5 TL olan bir ürün üretmektedir. Şirketin aylık sabit giderleri 2000 TL'dir. Ürünün satış fiyatı 8 TL olduğuna göre şirketin aylık satışlardan 7000 TL kâr edebilmesi için kaç ürün üretip satması gerektiğini hesaplayınız.

Çözüm:

Toplam Gelir = R (Revenue),
Toplam Maliyet = TC (Total Cost)
Sabit Maliyet = FC (Fixed Cost)
q = üretim (satış miktarı) ve p = birim satış fiyatı (etiket fiyatı) olmak üzere;

$$\boldsymbol{R = p.q}$$
$$\boldsymbol{TC = c.q + FC}$$
$$\text{Kar} = \text{Toplam Gelir} - \text{Toplam Maliyet}$$
$$P = R - TC$$
$$7000 = 8q - (5q + 2000)$$
$$7000 + 2000 = 3q$$
$$\frac{9000}{3} = q$$
$$q = 3000$$

adet ürün üretip satmalıdır.

7.3 İşletme Problemlerinin Çözümünde Denklem Kurma

İşletme problemlerinin matematiksel olarak modellenmesinde çoğunlukla eşitlik ve eşitsizlik kavramlarından yararlanılır. Burada denklem kurma veya matematiksel modelleme yardımı ile günlük hayatta sıkça karşımıza gelen bazı problemlerin çözümleri anlatılacaktır.

Örnek:

Birim maliyeti 25 $ olan bir malın birim satış fiyatı üzerinden %30 indirim yapıldığında birim kârın %40 olması için birim satış fiyatı ne olmalıdır?

Çözüm

x , satılacak malın birim satış fiyatı
$(0,3)\ x$, yapılacak indirim
25 , birim maliyet
$25.(0,40)$, kâr (%40) olmak üzere kurulacak denklem;

Birim Satış Fiyatı = Birim Maliyet + Birim Kâr (Katkı)

eşitliğinden;

$$x - (0,3x) = 25 + (25.0,40)$$

şeklinde olacaktır. x denklemin sol tarafında yalnız bırakılarak gerekli işlemler yapılırsa;

$$0,7x = 25 + 10$$

Ürünün birim satış fiyatı $x = 35/0,7 = 50$ $ olur.

Örnek:

Bir ürünün birim satış fiyatı üzerinden %40 kâr elde ediliyorsa birim maliyet üzerinden % kaç kâr edilmiş olur?

Çözüm:

p birim satış fiyatını, k birim kârı ve c de birim maliyeti göstermek üzere birim satış fiyatı, $p = c + k$ şeklindeki denklem olacaktır. Birim satış fiyatı üzerinden %40 kâr varsa $k = 0,4\,p$ ve geriye kalan birim maliyet,
$c = 0,6\,p$ olacaktır.
$c = 0,6p$ eşitliğinde p yerine $(c + k)$ yazılırsa maliyet ile kâr arasındaki ilişki bulunur.

$$c = 0{,}6\,(c + k)$$
$$0{,}4\,c = 0{,}6\,k$$
$$k = \frac{4}{6}c$$
$$k = 0{,}667.c$$

Demek ki maliyet üzerinden yaklaşık % 67 kar elde edilir.

Örnek:

Birim maliyet üzerinden % 25 kâr elde ediliyorsa birim satış fiyatı üzerinden % kaç kâr elde edilir?

Çözüm:

Yine p birim satış fiyatını, k birim kârı ve c de birim maliyeti göstermek üzere;
Satış fiyatı $p = c + k$ olacaktır ve maliyet üzerinden %25 kâr,

$$k = 0{,}25.c \text{ ise } c = 4.k$$

olacaktır.

$$p = c + k$$
$$p = 4k + k$$
$$p = 5k$$

olur ve buradan;

$$k = \frac{1}{5}p$$

bulunur. Bu demektir ki kâr satış fiyatı üzerinden yaklaşık $1/5 = 0{,}20 = \%20$ olarak elde edilir.

Örnek:

6000 $‘ı olan bir adam parasını gelir sağlayabileceği, yıllık %20 getirisi olan nispeten güvenli bir yatırım ile yine yıllık %30 getirisi olan daha riskli bir başka yatırımla değerlendirmek istemektedir. Bir yılsonunda yatırımlarının 1700 $’lık (kâr) kazanç sağlaması için her bir yatırımın miktarı ayrı ayrı ne kadar olmalıdır?

Çözüm:

Her bir yatırımı ayrı ayrı bulunacağı için; %20’lik yatırıma x dersek, %30’luk yatırım da $(6000 - x)$ kadar olacaktır. Çünkü yatırımcı toplam 6000$’a sahiptir.
P yatırım miktarı, r getiri oranı ve I da bir yıllık kazanç olmak üzere;
kazanç (I);

$$I = P.r$$

olacaktır.

Aşağıdaki tabloda getiri oranı ve yatırım miktarına bağlı olarak kazancı belirleyen denklemleri görülmektedir.

Seçenekler	***P***	***r***	***I***
%20 lik yatırım	x	0,20	$0{,}20x$
%30 luk yatırım	$6000 - x$	0,30	$0{,}30(6000 - x)$
Toplam yatırım	**6000**		**1700**

O hâlde toplam kazancın 1700 $ olması için kazancın (getirinin) denklemi;

$$0{,}20x + 0{,}30(6000 - x) = 1700$$

şeklinde kurulur.

$$0{,}20x - 0{,}30x = 1700 - 0{,}3.6000$$
$$-0{,}10x = -100$$
$$x = 1000\ \$$$

olmalıdır. Demek ki %20'lik yatırım 1000$ ve öyleyse %30'luk yatırım da 6000 – 1000 = 5000 $ olmalıdır.

Örnek:

Tek bir ürün üreten bir firmanın toplam kârı ile satış miktarı arasında $4q - 3P = 4000$ şeklinde bir eşitlik söz konusu ise;

a) Firmanın elde edeceği kârın 2000 $ olabilmesi için kaç adet üretip satması gerekir?

b) P' yi x cinsinden ifade eden denklemi yazınız.

c) 1300 birimlik ürün üretilip satıldığında ne kadar kâr elde edilir?

d) Hangi satış noktasında kâr sıfırdır?

Çözüm:

a) $4q - 3\,(2000) = 4000$

$4q - 6000 = 4000$

$q = 2500$ adet üretilip satılması gerekir.

b) $4q - 4000 = 3P$

$$P = \frac{4}{3}q - \frac{4000}{3}$$
$$P = \frac{4q - 4000}{3}$$

şeklinde ifade edilir.

c)

$$P = \frac{4q - 4000}{3} = \frac{4.1300 - 4000}{3}$$
$$P = \frac{1200}{3} = 400\ \text{TL}$$

kâr elde edilmektedir.

d)

$$\frac{4q - 4000}{3} = 0$$
$$4q - 4000 = 0$$
$$4q = 4000$$
$$q = 1000$$

adet satılırsa kâr 0 olur.

2) Şeker üreten bir firmanın toplam sabit maliyetleri 1000 TL ve ürettiği şekerlerin birim değişken maliyeti 15 TL'dir. Firma, ürettiği şekerlerin tanesini 25 TL'ye satarsa kâr elde etmek için en az kaç şeker satmalıdır?

$FC = 1000\,TL \quad c = 15\,TL \quad p = 25\,TL \quad R = p.q \quad TC = cq + FC \quad P = R - TC$

Çözüm:

$R = 25.q$

$TC = 15q + 1000$

$$P = R - TC$$
$$25.q - 15q - 1000 > 0$$
$$10q - 1000 > 0$$
$$10q > 1000$$
$$q > 100 \text{ Adet}$$

3) Bu firmanın toplam sabit maliyetleri 1000 TL ve ürettiği şekerlerin birim değişken maliyeti 15 TL'dir. Firma ürettiği şekerlerin tanesini 25 TL'ye satarsa başabaş noktası satış miktarı kaçtır?

$$P = 0 \text{ (Kâr sıfır)}$$
$$10q - 1000 = 0$$
$$q = 100 \text{ Adet}$$

4) Bu firmanın toplam sabit maliyetleri 1000 TL ve ürettiği şekerlerin birim değişken maliyeti 15 TL'dir. Firma ürettiği şekerlerin tanesini 25 TL'ye satarsa başabaş noktası satış geliri kaç TL'dir?

$FC = 1000\,TL \quad c = 15\,TL \quad p = 25\,TL$

$R = p.q$

$$TC = cq + FC$$
$$P = R - TC$$
$$R = 25.100 = 2500 \text{ TL}$$

5) Bu firmanın toplam sabit maliyetleri 1000 TL ve ürettiği şekerlerin birim değişken maliyeti 15 TL'dir. Firma ürettiği şekerlerin tanesini 25 TL'ye satarsa 1000 TL kâr elde etmek için kaç adet şeker üretip satması gerekir?

Çözüm:

$P = 1000$ TL

$$P = R - TC$$
$$1000 = 25.q - 15q - 1000$$
$$10q - 1000 = 1000$$
$$10q = 2000$$
$$q = 200 \text{ Adet}$$

Örnek:

Bir yayınevi birim başına baskı maliyeti 0,38 \$ ($c = 0{,}38$) olan aylık dergiyi birim satış fiyatı 0,35 \$ ($p = 0{,}35$)'dan bayilere ulaştırmaktadır. Yayınevi dergide yayınladığı reklamlardan gelir elde etmektedir. Bu reklam geliri; 10000 adedin üzerinde satılan her dergiden elde edilen gelirin % 10'u kadardır. Bu durumda yayınevinin kâr edebilmesi için ayda kaç tane dergi basıp satmalıdır?

Çözüm:

$$\text{Toplam Gelir – Toplam Gider = Kâr}$$
$$0{,}35\,q + (q - 10000).0{,}35.0{,}1 - 0{,}38\,q \geq 0$$
$$-0{,}03q + 0{,}035q - 350 \geq 0$$
$$0{,}005\,q \geq 350$$
$$q \geq 70000$$

Yayınevi kâra geçebilmek için 70001 adet dergi basıp satmalıdır.

7.4 Arz ve Talep Fonksiyonları

Bir malın talebi; tüketicinin satın alacağı miktara q, o malın fiyatına (p), tüketicinin gelirine (Y), rakip malların (P_r) ve tamamlayıcı (P_t) malların fiyatına, tüketicinin keyif ve alışkanlıklarına (W) ve daha birçok etkene bağlı olarak değişir. Talep fonksiyonu kapalı ve açık olarak denklem;

$$Q_d = f(P, Y, Pr, Pt, W, \dots) = a + \ b.p + c.Y + d.P_r + e.P_t + f.W$$

şeklinde gösterilebilir.

Bu denklemde fiyat (p) dışında kalan değişkenleri denklemde sabit varsayarak talep denklemini fiyatın bir fonksiyonu olarak $q = f(p) = a + b \cdot p$ şeklinde gösterebiliriz. Bu hâliyle talep fonksiyonu (doğrusu) fiyat değişmelerine bağlı olarak talebin nasıl belirlenebileceğini gösterir.

Genel olarak çok alıcılı çok satıcılı sistemlerde, bir malın fiyatı arttığında o mala talep edilen miktar genellikle azaldığından yani ters yönlü bir değişim olduğundan talep doğrusunun eğimi negatif olacak ve talep fonksiyonu $q = f(p) = a - b \cdot p$ şeklinde olacaktır. İktisadi bir gerçek olarak fiyat $= p \geq 0$ ve talep miktarı $q \geq 0$ olacak dolayısıyla da talep doğrusu koordinat sisteminde birinci bölgede bulunacaktır. Mümkün talep ilişkileri geometrik olarak aşağıdaki gibi olacaktır.

Arz bir malın çeşitli fiyat seviyelerinde piyasaya sunulan mal miktarını gösterir. Talep fonksiyonunda olduğu gibi arz fonksiyonunda da arz miktarını etkileyen malın fiyatı (p), sermayenin fiyatı (P_c), emek (L), doğa koşulları (D) ve teknoloji (T) gibi birçok değişken vardır. Bu değişkenler yardımıyla arz fonksiyonu kapalı ve açık biçimde,

$$q = \ f(p, Pc, L\ , D, T, \dots) = a + \ b.p + c.P_c + d.L + e.D + f.T$$

şeklinde gösterilebilir.

Bu denklemde fiyat (p) dışında kalan değişkenler denklemde sabit varsayılarak arz fonksiyonunu (denklemini) fiyatın bir fonksiyonu olarak $q = a + \ b.p$ *ş*eklinde gösterilebilir. Bu hâliyle arz fonksiyonu (doğrusu) fiyat değişmelerine bağlı olarak arzın nasıl belirlenebileceğini gösterir.

Genel olarak bir malın fiyatı artığında o malın piyasaya arz edilen miktarı arttığından yani aynı yönlü bir değişim olduğundan arz doğrusunun eğimi pozitif olacak ve arz fonksiyonu $q = \ a + \ b.p$ *ş*eklinde ifade edilir. İktisadi bir gerçek olarak fiyat $p \geq \ 0$ ve arz miktarı $q \geq 0$ olacak dolayısıyla da talep doğrusu koordinat sisteminde birinci bölgede bulunacaktır.

Geleneksel yaklaşıma göre piyasa talebi denildiğinde, diğer koşulların sabit olması varsayımı altında (ceteris paribus) fiyatla miktar arasındaki ters ilişki anlaşılmalıdır. Matematiksel anlatım ile bu, $q = f(p)$ olmaktadır.

Örnek:

Aşağıda bir ürünün belirli dönemlerde fiyat değişimlerine göre satılan miktarları verilmiştir. Burada “p” malın birim satış fiyatını (etiket fiyatını) gösterir. Basit doğrusal biçimde ele alındığında ise,

$$q = 110 - 10p$$

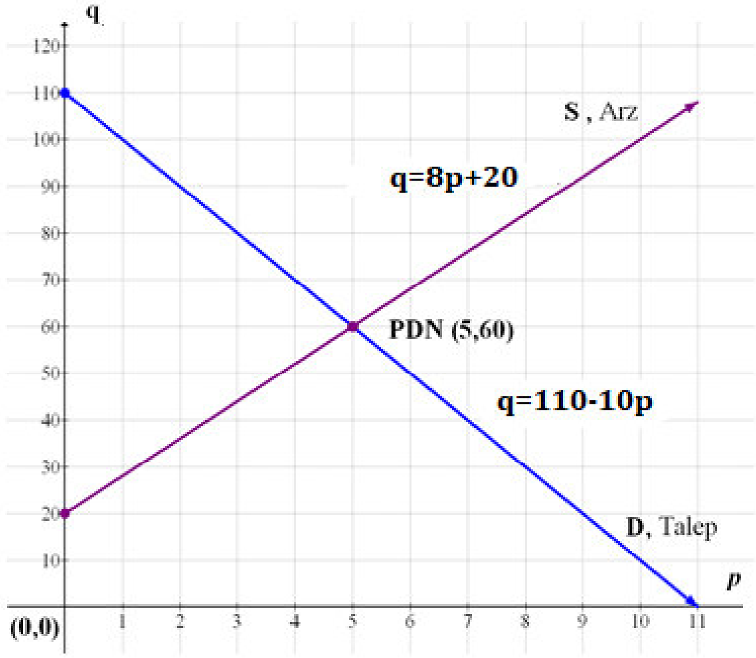
olarak belirlenebilir. Fiyat miktar ilişkisinin grafiksel sunuluşu ise, “**talep eğrisi**” veya doğrusal kabul edildiğinde “**talep doğrusu**” olarak adlandırılır. Böylece,

$$q = 110 - 10p$$

şeklinde talep denklemi oluşur.

Birim Fiyatı	Talep Edilen Miktar
9	20
8	30
7	40
6	50
5	60

Bu dönemde oluşan arz fonksiyonu da $q = 8p + 20$ gibi doğrusal olarak belirdi ise, talep doğrusu ile arz doğrusunun kesişiminde Pazar denge noktası oluşur. Bu noktayı bulabilmek için arz talebe eşitlenir. Ürünün fiyatı 5 TL ve bu dönemde bu üründen 60 adet satılmaktadır.



Şekil 7.2: Arz Talep Doğruları ve Pazar Denge Noktası

Bir ürüne ilişkin arz fonksiyonu üreticilerin piyasaya sunacakları ürünün fiyatı ile miktarı arasındaki ilişkiyi belirler. Üreticiler ürünün hem fiyatını hem de belirli bir dönemde o ürüne olan talebi (satılan ürün miktarını) arttırmaya çalışırlar. Bu şekilde üründen elde edecekleri gelir $R = p.q$ artacaktır. **Arz fonksiyonu** satıcıların piyasaya sunacakları ürün miktarı ile ürünün fiyatı arasındaki ilişkiyi belirler. Arz fonksiyonu için hem fiyat hem de miktar aynı yönde değişim gösterir. Dolayısıyla doğrusal arz fonksiyonları genellikle pozitif eğimli olur.

Tüketiciler açısından bakıldığında, oligopol dediğimiz çok alıcılı çok satıcılı sistemde ürünün fiyatı arttırıldığında, belirli bir dönemde o ürüne olan talep azalır. Bir ürünün **talep fonksiyonu** alıcıların piyasadan almak istedikleri ürün miktarı ile ürünün fiyatı arasındaki ilişkiyi gösterir. Bu ilişkide genellikle fiyat artarken ürüne olan talep azaldığı için, doğrusal talep fonksiyonları genellikle negatif eğimlidir.

Geleneksel yaklaşıma göre piyasa talebi denildiğinde, diğer koşulların sabit olması varsayımı altında fiyatla miktar arasındaki ters ilişki anlaşılmalıdır.

Bir ürünün fiyatı p ile, belirli bir dönemde o ürüne olan talep q ile gösterilecek olur ise, arz veya talep fonksiyonları $q = f(p)$ veya $p = f(q)$ biçiminde gösterilirler.

Ters talep fonksiyonu (denklemi): Önceki konularda anlatıldığı gibi, talep (tüketim) miktarı fiyata bağlı olduğundan talep denklemi $q = f\ (p)$ şeklindeydi. Ters talep denklemi ise $p = f(q)$ şeklinde yazılır. Buna göre ters talep denklemini, pratik kural olarak şöyle bulabiliriz.

Doğrusal talep denklemi $q = a - bp$ ise,

Ters talep denklemi ;

$$p = \left(\frac{a}{b}\right) - \left(\frac{1}{b}\right) q$$

şeklinde yazılır. Örneğin : $q = 40 - 5p$ ise ters talep denklemi;

$$p = \left(\frac{40}{5}\right) - \left(\frac{1}{5}\right) q$$

Ters talep denkleminde fiyat artarsa talep üzerinde aşağıdan yukarıya doğru hareket oluşur. Fiyat azalırsa tam tersi yani yukarıdan aşağıya doğru hareket oluşur. Talebi belirleyen gelir değerler değişirse talep doğrusu yeniden çizilir. Örneğin gelir artarsa talep doğrusu bir önceki konumuna göre daha yukarıda çizilir. Gelir azalırsa bir önceki konumuna göre daha aşağıda çizilir.

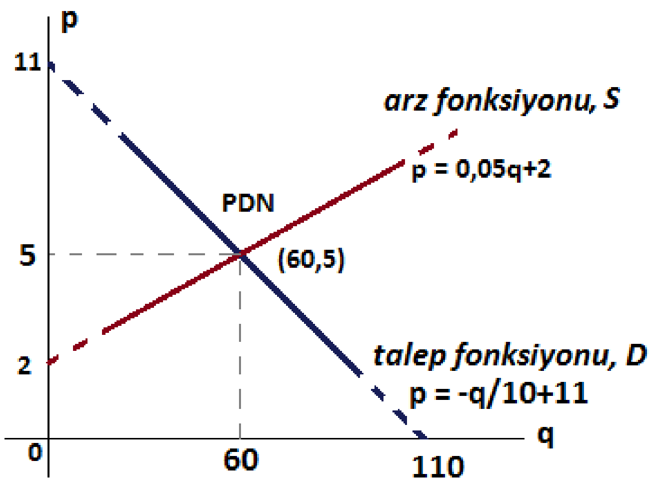
Örnek:

Talep fonksiyonu;

$$p = f(q) = -\frac{q}{10} + 11$$

olarak saptanmış ise, bu talep fonksiyonu için aşağıdaki değerler elde edilir. Üreticiler açısından bakıldığında ürünün arz fonksiyonu da $p = 0{,}05q + 2$ olarak modellenmiş ise, bu durumda arz ve talep fonksiyonları bir noktada kesişecektir. İşte bu noktaya Pazar Denge Noktası (equilibrium point) denir ve PDN olarak kısaltılır.

Talep Edilen Miktar (q)	Birim Fiyatı (p)
20	9
30	8
40	7
50	6
60	5



Şekil 7.3: Arz ve Talep Doğruları, Pazar Denge Noktası

Örnek:

A ürünün fiyatı 80TL iken 10 adet satılmıştır; fiyatı 60TL'ye düştüğünde satılan ürün sayısı 20 adet olmuştur. Buna göre, talep fonksiyonunun doğrusal değişim gösterdiği varsayılarak,

a. Talep fonksiyonunu bulunuz.
b. Ürünün fiyatı 40TL'ye düştüğünde bu üründen ne kadar satılır?

Çözüm:

Talep Fonksiyonu (10,80) ve (20,60) noktalarından geçen doğrudur.

$$\frac{p - p_1}{p_2 - p_1} = \frac{q - q_1}{q_2 - q_1}$$

$$\frac{p - 80}{60 - 80} = \frac{q - 10}{20 - 10}$$

$$\frac{p - 80}{-2} = \frac{q - 10}{1}$$

Talep Fonksiyonu, $p = -2q + 100$

$p = 40$ TL için,

$$p = -2q + 100$$

$$40 = -2.q + 100$$

$$2q = 100 - 40$$

$$q = 30 \text{ Adet}$$

Örnek:

p fiyatı, q üretim (satış) miktarını göstermek üzere bir ürünün arz ve talep denklemleri $2p - q = 60$; $3q + 4p = 240$ olduğuna göre pazar denge noktasını bulunuz. Denge noktası satış fiyatı ve satış miktarı nedir?

Pazar denge noktasını bulmak için ürünün arz ve talep fonksiyonu kesiştirilir.

$$p = \frac{q}{2} + 30 \quad \text{(Arz)}$$

$$p = -\frac{3q}{4} + 60 \quad \text{(Talep)}$$

$$\frac{q}{2} + 30 = -\frac{3q}{4} + 60$$

$$\frac{5q}{4} = 30 \quad ; \quad q = 24$$

$$p = \frac{q}{2} + 30 = \frac{24}{2} + 30 = 12 + 30 = 42 \text{ TL}$$

$PDN = (24, 42)$ bulunur.

Örnek:

Bir ürünün arz fonksiyonu $p = 2q + 5$ ve talep fonksiyonu $p = -2q + 10$ ise, bu ürünün Pazar denge noktası ne olur?

Cevap: Arz ve talep fonksiyonları eşitlenir.

$$p = 2q + 5 \quad \text{(Arz)}$$

$$p = -2q + 10 \quad \text{(Talep)}$$

$$2q + 5 = -2q + 10$$

$$2q + 2q = 10 - 5$$

$$4q = 5$$

$$q = 5/4$$

$$p = 2q + 5$$

$$p = 2.\frac{5}{4} + 5 = 15/2$$

$$PDN = (\frac{5}{4}, \frac{15}{2})$$

noktası bulunur. (Dikkat: Noktanın, apsis (q) ve ordinat (p) gibi iki bileşeni vardır)

Örnek:

Bir atölyede A ve B mamulleri K ve L gibi iki tip tezgâhta işlenerek üretilmektedir. K ve L tipi tezgâhların haftalık çalışma kapasiteleri sırası ile 200 ve 560 saat olup her mamulün bir biriminin tezgâhlardaki işlem süreleri saat olarak aşağıda verilmektedir.

	A	**B**
K	1	2
L	2	8

Bu verilere göre tezgâh kapasitelerinin tam kullanılması şartı ile her üründen kaçar adet üretileceğini hesaplayınız.

$$a + 2b = 200$$

$$a + 8b = 560$$

İkinci denklemi – ile çarpılıp;

$$a + 2b = 200$$

$$-a - 8b = -560$$

taraf tarafa toplanırsa;

$$-6b = -360 \quad \rightarrow \quad b = 60$$

ve buradan

$$a + 2b = 200 \quad \rightarrow a + 2.60 = 200 \quad \rightarrow \quad a = 80$$

bulunur.

Örnek:

Eğimi -1/2 olan bir doğrusal talep fonksiyonu için, talep 24 adet iken birim satış fiyatı 108TL dır. Eğer talep 3 katına çıkarsa oluşacak birim satış fiyatını bulunuz.

p; fiyatı, q ise talep miktarını göstermek üzere bir ürüne ilişkin arz denklemi $p = q/2 + 19$ ve talep denklemi ise $p = 400/(q + 4)$ olarak verilmiş olsun. Bu durumda pazar denge noktasını bulunuz. Eğer ürüne 18 pb.'lik ek vergi getirilirse bu durumda PDN ne olur?

Çözüm:

$$\frac{400}{q+4} = \frac{q}{2} + 19$$

$$\frac{400}{q+4} = \frac{(q+38)}{2}$$

$$800 = (q+38)(q+4)$$

$$q^2 + 42q - 648 = 0$$

$$(q-12)(q+54) = 0$$

$q = -54$ ve $q = 12$ bulunur. Talep miktarı negatif olmayacağı için birinci bölgede bulunan sonuç kullanılır ($q = 12$). Bu durumda, $p = q/2 + 19$ olduğuna göre, $p = 12/2 + 19 = 25$ pb. bulunmuş olur.

$$PDN = (12 \text{ Adet}, 25 \text{ pb})$$

Eğer ürüne 18 pb.'lik ek vergi getirilirse, üretici vergiyi satılan her ürünün fiyatına yansıtacaktır. Dolayısıyla, tüketici satış fiyatının 18 pb fazlasını ödemek durumunda kalacaktır. Vergilendirme ile birlikte ürünün değerinde değişiklik olmayacağından, talep denkleminin değişmeyeceği varsayımı altında oluşacak yeni arz denklemi aşağıdaki gibi olur.

$$p = f(q) + \text{Vergi}$$

Dolayısıyla arz denklemi,

$$p = \frac{q}{2} + 19 + 18 = q/2 + 37$$

olacaktır.

$$\frac{400}{q+4} = \frac{q}{2} + 37$$

$$\frac{400}{q+4} = \frac{(q+74)}{2}$$

$$800 = (q+74)(q+4)$$

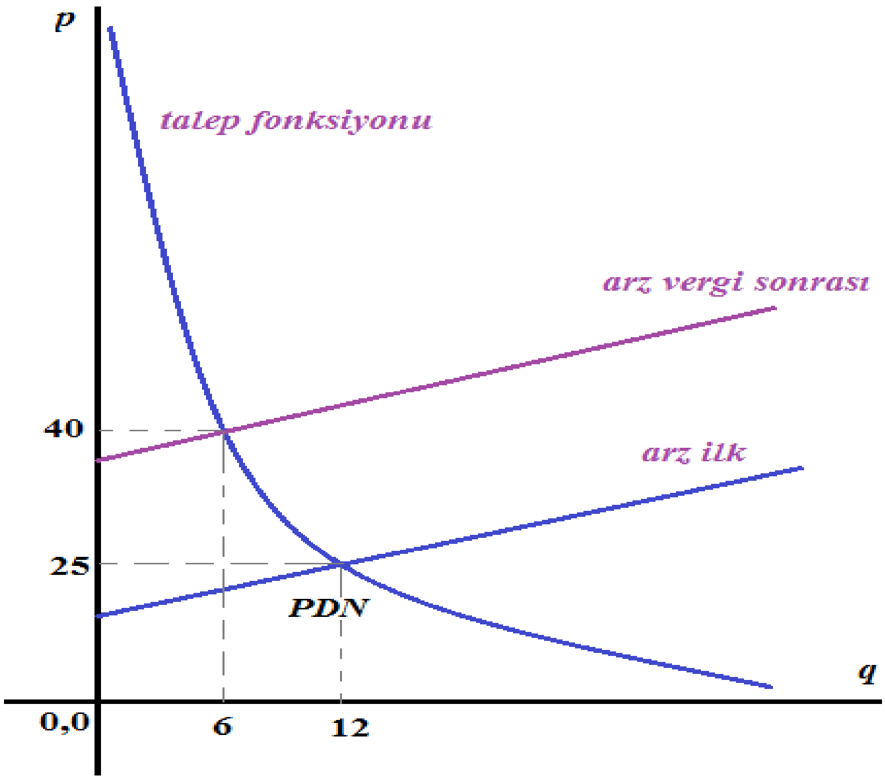
$$q^2 + 78q - 504 = 0$$

$$(q-6)(q+84) = 0$$

$q = -84$ ve $q = 6$ bulunur. Talep miktarı negatif olmayacağı için birinci bölgede bulunan sonuç kullanılır ($q = 6$). Bu durumda arz denklemi, $p = q/2 + 37$ olduğuna göre, $p = 3 + 37 = 40$ pb. bulunmuş olur.

$$PDN = (6 \text{ Adet}, 40 \text{ pb})$$

Yeni oluşan PDN'ye dikkat edilecek olursa, fiyat artmış, talep ise azalmıştır.



Şekil 7.4: Arz ve Talep ve PDN

7.5 Tüketim Fonksiyonu

Tüketim, insan ihtiyaçlarının doğrudan doğruya giderilmesi için mal ve hizmet kullanımıdır. Tüketici (consumer), hangi maldan ne kadar satın alacağına karar veren ekonomik birimdir. Tüketici, amaca göre sadece birey olabileceği gibi, çoğu kez de hane halkı olabilir. Örneğin bir otomobil, ev ya da arsa satın alırken bireysel karar yerine, çoğu kez hane halkının kararı gerekmektedir. Ancak lokantada yemek tercihini tüketici olarak birey vermektedir. Klasik iktisatçılar tüketimi, tüketim mallarının satın alınması olarak değerlendirmişler ve tüketim olgusu üzerinde fazla durmamışlar, daha çok gelirin paylaşımı ve üretim konularını incelemişlerdir. Tüketimin önemine ilk kez Keynes değinmiştir. Tüketimi açıklarken harcamaları esas almıştır. Tüketim harcamaları; mikro iktisadi açıdan tüketicinin fayda maksimizasyonu, makro iktisadi açıdan ise, istihdamı ve milli geliri belirleme noktasında, toplam talebin en önemli bileşenini oluşturması bakımından önem arz etmektedir. Keynes'e göre tüketim harcaması, belli bir dönemde yapılan toplam satışlar ile müteşebbislerin birbirlerine yaptıkları toplam satışlar arasındaki farktır. Tüketim harcamalarını etkileyen önemli faktörleri şu şekilde sayabiliriz.

- Ekonomik faktörler
- Nüfusla ilişkili faktörler
- Davranışsal faktörler

Tüketim fonksiyonu teorilerinin esin kaynağı, farklı gelir gruplarındaki kişilerin tüketim eğilimlerinin ne olduğu sorusuna aranan cevaptır.

Tüketim fonksiyonu, Keynesyen makroekonomik analizde tüketim harcamaları ile GSYH arasındaki ilişkiyi ortaya koyan bir fonksiyondur. ... tüketim harcamaları ile millî gelir arasındaki ilişkiyi belirtir.

Bir ekonomide millî gelir seviyesi yükseldikçe tüketim harcamaları da düzgün bir seyir takip ederek artmaktadır. Durum, tüketim şedülü adı verilen bir tablo yardımıyla gösterilebilir. Malın muhtemel fiyatları karşısında, o maldan satın almak isteyen alıcıların istedikleri mal miktarını ve mala olan talebin genel yapısını ve özelliklerini açıklayan kavramdır. Belirli bir mal ya da hizmetini öteki koşullar değişmemek üzere, çeşitli fiyat düzeylerindeki arz miktarlarını gösteren tablodur.

$$Y = C + S$$
$$C = f(Y)$$

Milli Gelir (Milyar TL)	Milli Gelirdeki Artış (Milyar TL)	Tüketim Harcamaları (Milyar TL)	Tüketim Harcamalarındaki Artış (Milyar TL)
100	-	90	-
110	10	97	7
120	10	104	7
130	10	111	7
140	10	118	7

Yukarıdaki tabloya göre millî gelir arttıkça, yoğaltım harcamaları da genişlemektedir. Yalnız burada dikkat edilecek husus, tüketim harcamalarındaki her yükselişin millî gelirdeki artışların sabit bir yüzdesi kadar olmasıdır. Tablodaki ilişki şöyle bir fonksiyon halinde yazılabilir:

$$C = 10 + 0,7 \cdot Y$$

Burada C, tüketim harcamalarını, Y ise milli geliri göstermektedir.

Bu fonksiyonel ilişkiden anlaşıldığına göre, adı geçen ekonomide millî gelir seviyesi sıfır dahi olsa 10 Milyar TL'lik tüketim harcaması yapılmaktadır. Ayrıca millî gelirdeki her artış, kendisinin %70 kadar bir tüketim harcamasına sebep olmaktadır. Bu değişmez 0,7 katsayısına marjinal tüketim eğilimi adı verilir. Öte yandan, her millî gelir seviyesinde yapılan toplam tüketim harcamalarının adı geçen milli gelir seviyelerine oranı değişmektedir. Bu orana da ortalama tüketim eğilimi denmektedir. Örneğin milli gelir 100 Milyar TL iken ortalama tüketim meyli $90/100 = 0.90$, 110 milyar T.L. iken $97/110 = 0.88$ ve 140 milyar iken $118/140 = 0.84$ olmaktadır. Tüketim fonksiyonu genel bir doğrusal ilişki halinde yazılabilir:

$$C = C_0 + c \cdot Y$$

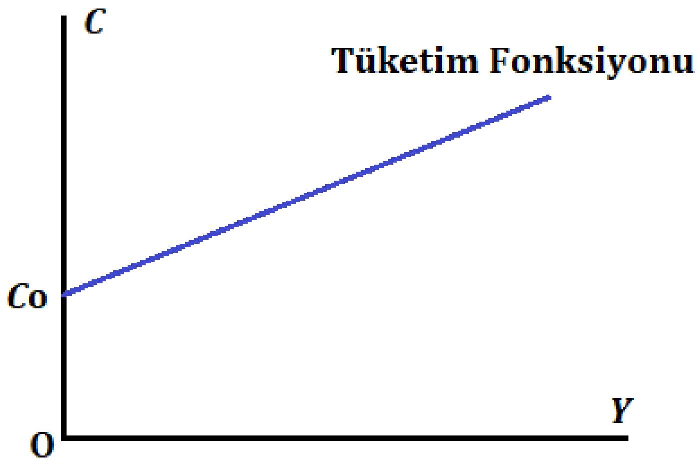
Burada

C, tüketim harcamalarını, C_0, otonom temel tüketimi, c, marjinal tüketim eğilimini, Y, millî geliri göstermektedir.

Tüketim fonksiyonunun millî gelire göre birinci türevi dC/dY, tanım gereğince marjinal tüketim eğilimi yani c'ye eşit olmaktadır.

Tüketim fonksiyonu doğrusallaştırılarak geometrik olarak, düzlem dik koordinat sisteminde bir doğru ile gösterilebilir. Doğrunun eğimi, fonksiyonun birinci türevi olan c dir.

$$C = f(Y) = C_0 + c \cdot Y$$



Şekil 7.5: Tüketim Fonksiyonu

Yukarıdaki şekilde, yatay eksende milli gelir (Y), dikey eksende tüketim harcamaları (C) yer almaktadır. Fonksiyonu gösteren doğrunun dik ekseni kestiği noktanın ordinatı, otonom tüketim harcamalarını (C_0) belirtmektedir. Yani millî gelir sıfır olsa dahi, bahis konusu ekonomide OC_0 kadar temel tüketim harcaması yapılmaktadır. Otonom tüketim, gelir harcama modelinde, millî gelir ve faiz oranlarından bağımsız olarak yapılan tüketim, yatırım, hükümet harcaması ile dışalım ve dışsatım demektir.

Her zaman, belli bir gelir olmasa bile, mutlaka bir tüketim miktarı vardır. Yani tüketim gelirin bir fonksiyonudur. Net gelir arttıkça tüketim de artar ama daha az miktarda artar. Net gelirdeki zamanla tüketilecek artış oranı her zaman sabittir. Bu orana "tüketimin marjinal eğilimi (belirtisi)" ya da tüketim fonksiyonu eğimi denir.

Tüketim harcamaları ile millî gelir arasındaki ilişki gecikmeli olarak da ele alınabilir. Belli bir dönemde yapılan tüketim harcamalarının bir önceki dönemin millî gelirinden etkilendiğini belirten bu tip bir yaklaşım, gerçeği daha iyi yansıtmaktadır.

Gecikmeli tüketim fonksiyonu şöyle yazılabilir:

$$C_t = C_0 + c \cdot Y_{t-1}$$

Burada,

C_0; ...temel tüketim harcaması

C_t; t dönemindeki tüketim harcamalarını,

Y_{t-1}; $t-1$ dönemindeki millî geliri belirtmektedir.

Fonksiyondaki c gecikmeli marjinal tüketim eğilimidir.

Tüketim fonksiyonu: Millî gelir analizi, tüketim fonksiyonlarının sınırlı alanlarda doğrusal olmalarından dolayı doğrusal fonksiyonların değişik bir kullanım alanını oluşturur.

Örnek:

Millî net gelir sıfır olduğunda, tüketim 80 milyar TL olmaktadır. Tüm ekonomi için tüketim; millî net gelire "her net gelir seviyesinde tüketim 10 milyar TL, ek olarak ayrıca %60 net gelirden oluşur" şeklinde doğrusal olarak bağlıdır. Buna göre bu doğrunun denklemini bulunuz, grafiğini çiziniz ve net gelir 300 miyar TL olduğunda toplam tüketim ne kadar olur?

Çözüm:

$$C = f(Y) = C_0 + c.Y$$

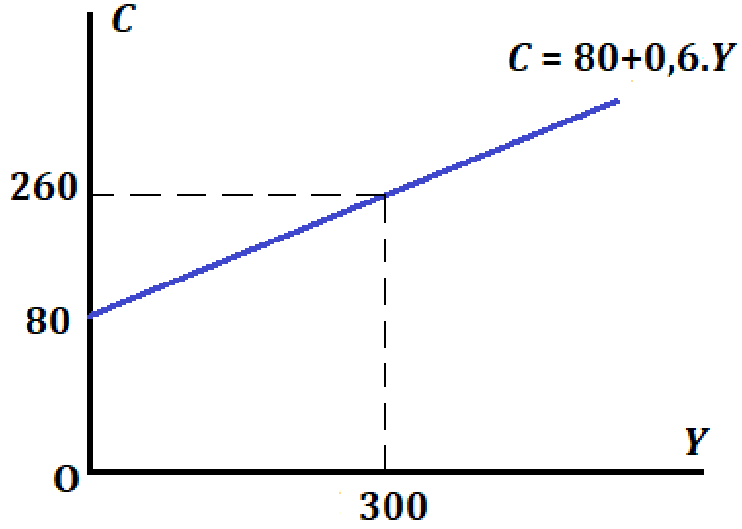
Temel tüketim = 100
Tüketimin marjinal eğilimi = 0,7

$$C = f(Y) = 80 + 0{,}6.Y$$

Gelir 100 TL

$$C = f(Y) = 80 + 0{,}6.300$$
$$C = f(Y) = 80 + 180$$
$$C = f(Y) = 260 \text{ TL}$$

Burada, net gelir 300 Milyar TL olur. Yani net gelir 300 milyar TL iken tüketim 260 milyar TL olmaktadır. Kalan $300 - 260 = 40$ milyar TL ise tasarrufa ayrılmaktadır.



Şekil 7.6: Tüketim Fonksiyonu Grafiği

Uygulama

1) Bir ürüne ilişkin birim değişken maliyet 15TL ve sabit maliyetler toplamı 2400TL'dir. Üretilen ürünlerin tamamının satıldığı varsayılmaktadır. Tüketici, ürün fiyatı 55TL olduğunda 45 birim ürün talep etmektedir. Ürün fiyatı 235 TL iken ise ürüne talep olmamaktadır.

- Ürüne ilişkin talep fonksiyonunu oluşturunuz.
- Ürünlerin üretiminde oluşan toplam maliyet fonksiyonunu belirleyiniz.
- Üründen elde edilen gelire ait fonksiyonu oluşturunuz.
- Başabaş noktasını bulunuz. Başabaş noktasına ait grafikleri çiziniz.

Çözüm:

$$\frac{p-55}{235-55}=\frac{q-45}{0-45} \rightarrow \frac{p-55}{180}=\frac{q-45}{-45} \rightarrow \frac{p-55}{4}=\frac{q-45}{-1}$$

$$-p+55=4q-180$$

$$p=-4q+235$$

$$R=p.q=(-4q+235).q=-4q^2+235q$$

$$TC=c.q+FC$$

$$TC=15.q+2400$$

Başabaş noktasındaki üretim miktarı,

$$R=TC$$

$$-4q^2+235q=15.q+2400$$

$$-4q^2+220q=2400$$

$$q^2-55q+600=0$$

$$(q-15)(q-40)=0$$

$$q_{01}=15 \text{ ve } q_{02}=40$$

çıkar.

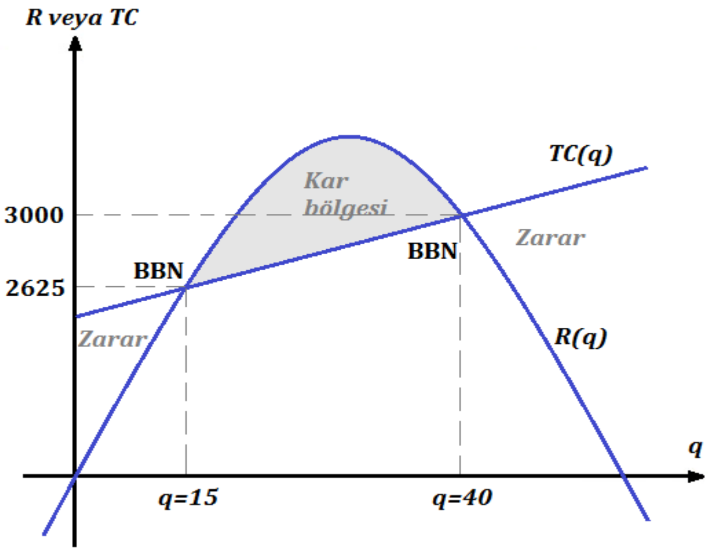
$TC_1=15.15+2400=2625$ TL

$TC_2=15.40+2400=3000$ TL

$R_1=-4.15^2+235.15=2625$ TL

$R_2=-4.40^2+235.40=3000$ TL

$q<15$ ve $q>40$ için zarar, $15<q<40$ arasında ise kar. $q=15$ ve $q=40$ için BBN mevcut.



2) Bir ürüne ilişkin talep fonksiyonu, $p = f(q) = -4q + 280$ ve arz fonksiyonu, $p = g(q) = 4q$ olarak verildiğine gör Pazar Denge Noktasını (PDN) bulunuz.

$$4q = -4q + 280$$
$$8q = 280$$

$q = 35$ ve $p = 140$ bulunur. PDN $= (35{,}140)$

Gelir fonksiyonu, $R = p.q = (-4q + 280).q = -4q^2 + 280q$

Maksimum gelirin olduğu üretim düzeyi;

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{280}{2.-4} = 35$$

Maksimum gelir ise; $R = -4q^2 + 280q = -4.35^2 + 280.35 = 4900$

Talebin 50 birim olduğu varsayımı altında, arz açığını (arz miktarının talep miktarından az olması) kapatmak için üreticinin piyasaya sunması gereken ek miktarı hesaplayınız.

$q = 50$ için, $p = -4.50 + 280 = 80$

$p = 80$ için $80 = 4q$ buradan $q = 20$ birim arz var. $50 - 20 = 30$ birim arz açığı söz konusudur.

3) Bir sitede birbirinin benzeri 360 daire bulunmaktadır. Site yönetimi kurulu bu daireleri aylık 600-900 TL bedel ile kiraya verecektir. Kira bedeli 600 TL olarak belirlendiğinde bütün daireler kiralanabilmektedir. Yönetim kurulu apartman dairelerinin aylık kira bedelini 50 TL artırması durumunda 20 kiracı daireyi kiralamaktan vazgeçmektedir. Kira bedeli ile kiraya verilecek apartman daireleri sayısı arasında doğrusal bir ilişki olduğuna göre yönetim kira gelirlerini maksimum yapabilmek için kira bedelini kaç TL olarak belirlemelidir? Bu durumda kaç daire kiralanmış olacaktır?

Nümerik Çözüm:

p	600	650	700	**750**	800	850	900
q	360	340	320	300	280	260	240
R	216000	221000	224000	**225000**	224000	221000	216000

Yukarıdaki tablodan görüldüğü gibi toplam kira geliri önce artmakta ve daha sonra azalmaktadır.

Çözüm 2:

$A(360, 600)$ $B(340, 650)$ gibi herhangi iki nokta seçersek;

Bu iki noktadan geçen doğru denklemini (dairelere olan talep denklemi) bulmak istersek:

$$\frac{y-y_1}{y_1-y_2}=\frac{x-x_1}{x_1-x_2} \quad \rightarrow \frac{p-p_1}{p_1-p_2}=\frac{q-q_1}{q_1-q_2}$$

$$\frac{p-600}{600-650}=\frac{q-360}{360-340}$$

$$\frac{p-600}{-50}=\frac{q-360}{20}$$

$$\frac{p-600}{-5}=\frac{q-360}{2}$$

$$p-600=\frac{-5q+1800}{2}$$

$$p=\frac{-5q}{2}+1500$$

$$R=p.q=\left(\frac{-5q}{2}+1500\right).q=\frac{-5q^2}{2}+1500q$$

Görüldüğü gibi talep fonksiyonu doğrusal bir fonksiyon, gelir denklemi ise ikinci dereceden bir fonksiyon olmaktadır.

3) Gelirin maksimum olduğu noktayı bulunuz.

Çözüm:

Tepe noktasının bulunması:

$$\frac{-b}{2a}=\frac{-1500}{2.(\frac{-5}{2})}=300$$

$$q=300 \quad \text{iken} \quad p=\frac{-5.300}{2}+1500$$

$$p=750 \text{ TL}$$

$$R=300.750=225.000 \text{ TL}$$

3) Bir malın fiyatı 3 br olduğunda bu maldan piyasaya 120 adet arz edildiği, fiyatı 4 br olduğunda ise arz miktarı 150 br' e çıktığı bilinmektedir?. Buna göre arz denklemini bulunuz. Fiyat p = 3 br ulaştığında piyasaya arz edilecek mal miktarı aşağıdakilerden hangisi olacaktır?

a) 50 b) 70 c) 180 **d) 120** e) 200

Uygulama Soruları

1) Şeker üreten bir firmanın toplam sabit maliyetleri 1000 TL ve ürettiği şekerlerin birim değişken maliyeti 15 TL'dir. Firma, ürettiği şekerlerin tanesini 25 TL'ye satarsa kâr elde etmek için en az kaç şeker satmalıdır?

$FC = 1000\, TL \quad c = 15\, TL \quad p = 25\, TL \quad R = p.q \quad TC = cq + FC \quad P = R - TC$

Çözüm:

$R = 25.q$

$TC = 15q + 1000$

$$P = R - TC$$
$$25.q - 15q - 1000 > 0$$
$$10q - 1000 > 0$$
$$10q > 1000$$
$$q > 100 \text{ Adet}$$

3) Bu firmanın toplam sabit maliyetleri 1000 TL ve ürettiği şekerlerin birim değişken maliyeti 15 TL'dir. Firma ürettiği şekerlerin tanesini 25 TL'ye satarsa başabaş noktası satış miktarı kaçtır?

$P = 0$ (Kâr sıfır)

$$10q - 1000 = 0$$
$$q = 100 \text{ Adet}$$

4) Bu firmanın toplam sabit maliyetleri 1000 TL ve ürettiği şekerlerin birim değişken maliyeti 15 TL'dir. Firma ürettiği şekerlerin tanesini 25 TL'ye satarsa başabaş noktası satış geliri kaç TL'dir?

$FC = 1000\, TL \quad c = 15\, TL \quad p = 25\, TL$

$R = p.q \quad TC = cq + FC \quad P = R - TC$

$R = p.q$

$$R = 25.100 = 2500 \text{ TL}$$

5) Bu firmanın toplam sabit maliyetleri 1000 TL ve ürettiği şekerlerin birim değişken maliyeti 15 TL'dir. Firma ürettiği şekerlerin tanesini 25 TL'ye satarsa 1000 TL kâr elde etmek için kaç adet şeker üretip satması gerekir?

Çözüm:

$$P = 1000 \text{ TL}$$
$$P = R - TC$$
$$1000 = 25.q - 15q - 1000$$
$$10q - 1000 = 1000$$
$$10q = 2000$$
$$q = 200 \text{ Adet}$$

2) Önceki verilerden hareketle, Tüketim fonksiyonu $C = 5 + 0{,}45.Y$ olarak belirlendiğine göre; Net gelir 15 Milyar TL iken, toplam tüketim ne kadardır ve ne kadar tasarruf edilir? Toplam tüketim 20 milyar TL iken net gelir ve tasarruf miktarı ne kadardır. Tasarruf miktarı toplam tüketimin % kaçıdır?

Çözüm:

$$C = 5 + 0{,}45.Y$$
$$C = 5 + 0{,}45.15$$

$$C = 11{,}75 \text{ TL}$$

olur yani net gelir 15 milyar iken toplam tüketim 11,75 Milyar TL olmaktadır. Tasarruf edilen miktar ise $15 - 11{,}75 = 3{,}25$ Milyar TL'dir.

$$C = 5 + 0{,}45.Y$$

$C = 20$ olduğuna göre;

$$20 = 5 + 0{,}45.Y$$

$$Y = 33{,}33 \text{ Milyar TL}$$

Yani toplam tüketim 20 milyar iken, net gelir 33,33 Milyar TL olur. Tasarruf edilen miktar $33{,}33 - 20 = 13{,}33$ TL'dir. Bu da toplam gelirin 13,33 / 33,33 $\cong$% 0,40'na karşılık gelmektedir.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde bundan önceki bölümlerde anlatılan, denklem ve eşitsizlikler, Fonksiyonlar, Doğrusal ve İkinci Dereceden fonksiyonların işletme ve iktisat uygulamaları gerçekleştirilmektedir. Bölümde, Toplam Gelir, Toplam Maliyet, Toplam Kar, Ortalama Maliyet, Sabit Maliyet, Başabaş Analizi, Üretim Fonksiyonu ve Tüketim Fonksiyonu ve Tasarruf ilişkisi konuları üzerinde durulmuştur.

Bölüm Soruları

1) 30 TL'ye toptancıdan alınan bir gömleğin etiket fiyatı 50 TL olduğuna göre bu gömlekten 100 adet satıldığında elde edilecek gelir ne kadardır?
a) 2000 b) 3000 c) 5000 d) 8000 e) 10000

2) Bir gömleğin birim üretim maliyeti $c = 30$ TL ve bir yılda oluşan sabit maliyetler toplamı $FC = 60000$ TL olarak belirlendiğine göre yılda 2500 adet gömlek üreten firmanın toplam maliyeti kaç TL olur?
a) 60000 b) 75000 c) 120000 d) 135000 e) 150000

3) Bir gömleğin birim üretim maliyeti $c = 30$ TL ve bir yılda oluşan sabit maliyetler toplamı $FC = 60000$ TL olarak belirlenmiştir. Gömleğin birim satış fiyatı 50 TL olduğuna göre başabaş noktası için yılda kaç gömlek satışı gerçekleşmelidir?
a) 2000 b) 2500 c) 2750 d) 2800 e) 3000

4) Bir gömleğin birim üretim maliyeti $c = 30$ TL ve bir yılda oluşan sabit maliyetler toplamı $FC = 60000$ TL olarak belirlenmiştir. Gömleğin birim satış fiyatı 50 TL olduğuna göre yılda 5000 adet gömlek satışı gerçekleştiren firmanın karı ne kadar olur?
a) 40000 TL b) 50000 TL c) 90000 TL d) 125000 TL e) 15000 TL

5) Bir ürünün arz denklemi $p = 2q - 15$ ve talep denklemi $p = -5q + 48$ ise pazar denge noktası aşağıdakilerden hangisidir?
a) $(9, 3)$ b) $(9, 0)$ c) $(0, 3)$ d) $(3, 7)$ e) $(3, 12)$

6) Bir ürünün üretimine ilişkin belirli bir dönemde oluşan toplam maliyet fonksiyonu $TC = 5q + 1000$ ve toplam gelir fonksiyonu $R = 7q$ olarak belirlendiğine göre kar fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?
a) $P = 2q$ b) $P = 2q + 1000$ c) $P = 2q - 1000$ d) $P = 1000$ e) $P = -1000$

7) Toplam gelir denklemi $R = 40q$ şeklinde verilen ürün için, sabit maliyet 5000 TL'dir. Bu üründen 1000 adet satıldığında başabaş noktasına geliniyor. Ürün başına değişken maliyet kaç TL olur?
a) 40 b) 35 c) 30 d) 25 e) 20

8) Bir ürüne ilişkin belirlenen talep fonksiyonu $p = -5q + 110$ ise toplam gelirin maksimum olduğu q değerini bulunuz.
a) 9 b) 10 c) 11 d) 12 e) 13

9) Bir ailenin temel tüketim gideri 2000 TL'dir. Ailenin net gelirinin %60'ı tüketim harcamaları olarak tanımlandığına göre, bu aile 10000 TL net gelire sahip olduğunda tüketim harcaması sonrası kaç TL tasarruf oluşturabilir?
a) 2000 b) 3000 c) 4000 d) 5000 e) 6000

10) Bir ailenin temel tüketim gideri 3000 TL'dir. Ailenin net gelirinin % 40'ı tüketim harcamaları olarak tanımlandığına göre, bu aile 6000 TL net gelire sahip olduğunda kaç TL tasarruf oluşturabilir?

a) 0 b) 100 c) 300 d) 500 e) 600

Cevaplar

1) c, 2) d, 3) e, 4) a, 5) a, 6) c, 7) b, 8) c, 9) a, 10) e

8. ÜSTEL VE LOGARİTMİK FONKSİYONLAR

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

8.1. Üstel Fonksiyon
8.2. Üstel Fonksiyon Grafikleri
8.3. Üslü Sayı Kuralları
8.4. Logaritmik Fonksiyon
8.5. Doğal Logaritma Fonksiyonu (ln)
8.6. Logaritmik Fonksiyon Grafikleri
8.7. Üstel Fonksiyon ile Logaritmik Fonksiyon Arasındaki Fark
8.8. Nüfus Problemi Uygulaması

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1) Üstel fonksiyon nedir?

2) Logaritmik Fonksiyon nedir?

3) Bu iki fonksiyon arasındaki fark nedir?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	**Kazanım**	**Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği**
Üstel Fonksiyon	Üstel fonksiyonu tanımlayabilmek	Okuyarak, fikir yürüterek
Üstel Fonksiyon Grafik Çizimi	Üstel fonksiyon grafiklerini çizebilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, uygulama yaparak
Logaritmik Fonksiyon	Logaritmik fonksiyonu tanımlayabilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, uygulama yaparak
Logaritmik Fonksiyon Grafik Çizimi	Logaritmik fonksiyon grafiklerini çizebilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, uygulama yaparak

Anahtar Kavramlar

- Üstel Fonksiyon
- Logaritma
- Doğal Logaritma

Giriş

Üstel ve logaritmik fonksiyonlar, matematik, işletme, ekonomi ve mühendislik alanlarında çok sayıda kullanım alanı bulan fonksiyonlardır. Nüfus artışı, bankaya yatırılan paranın artışı, bir ortamdaki bakteri sayısının artışı ya da azalışı üstel ve logaritmik fonksiyonlar yardımı ile modellenebilir.

8.1 Üstel Fonksiyonlar

Tanım: $b \in R^{+} - \{1\}$ ve $x \in R$ olmak üzere,

$$\boldsymbol{f(x) = b^{x}}$$

biçiminde yazılan fonksiyona üstel fonksiyon denir. Burada ***b*** taban (*base*) , ***x*** ise üs olarak adlandırılır. Üstel fonksiyonların tanım kümesi (x yerine konabilecek sayıların kümesi) reel sayılardır. Değer kümesi ise pozitif reel sayılardan oluşur.

$$f(x) = 3^{x} \;, \quad g(x) = 2^{x} \;, \qquad h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x} \quad , \qquad t(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^{x}$$

fonksiyonları birer üstel fonksiyondur. Dikkat edilirse taban değeri ilk ikisinde 1'den büyük pozitif, diğer ikisinde 0 ile 1 arasında pozitif sayılardır.

8.1.1 Üslü Sayıların Özellikleri

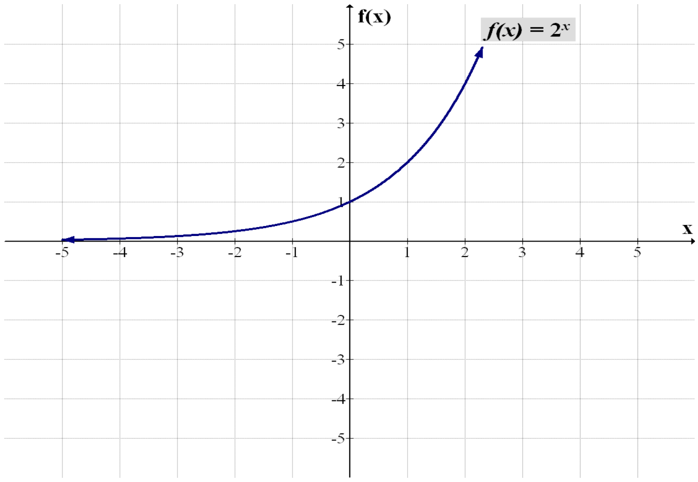
Üstel fonksiyon, üslü ifadelerde gördüğümüz bütün özellikleri R üzerinde sağlar.
$a, b \in R^{+}$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ ve $x, y \in R$ için aşağıdaki özellikler vardır:

1. $b^{m}.b^{n} = b^{m+n}$
2. $(b^{m})^{n} = b^{m.n}$
3. $(a.b)^{n} = a^{n}.b^{n}$
4. $\frac{a^{m}}{a^{n}} = a^{m-n}$
5. $(\frac{a}{b})^{n} = \frac{a^{n}}{b^{n}}$
6. $a^{0} = 1$
7. $a^{-n} = \frac{1}{a^{n}}$
8. $a \in R^{+}$ ve $a \neq 1$ olmak üzere, $a^{x} = a^{y} \leftrightarrow x = y$,
9. $a, b \in R^{+}$ ve $x \neq 0$ olmak üzere, $a^{x} = b^{x} \leftrightarrow a = b$ dir.

8.1.2 Üstel Fonksiyonun Grafiği

$f(x) = b^{x} = 2^{x}$ fonksiyonu ele alınırsa x yerine değerler aşağıdaki değerler konduğunda fonksiyonun alacağı değerler aşağıdaki tabloda verilmektedir.

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	∞
$\boldsymbol{f(x)}$	0	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	∞

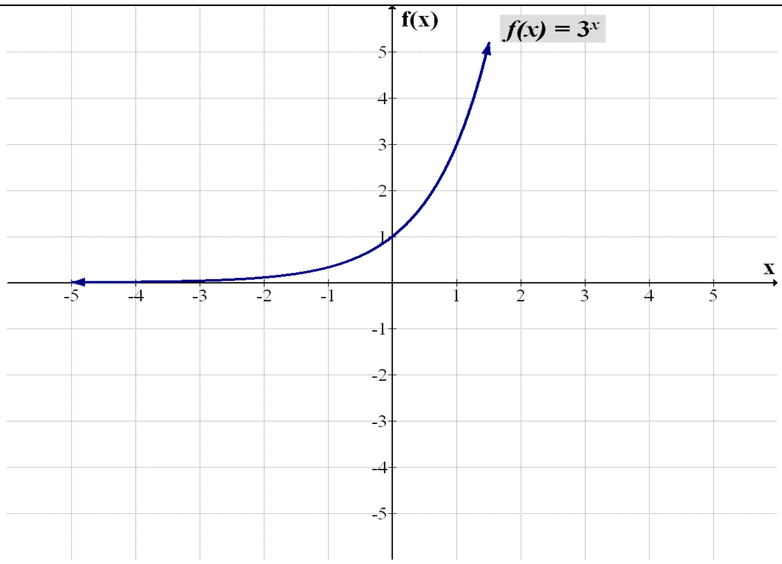


Şekil 8.1: Üstel Fonksiyon Grafik Örneği

Örnek:

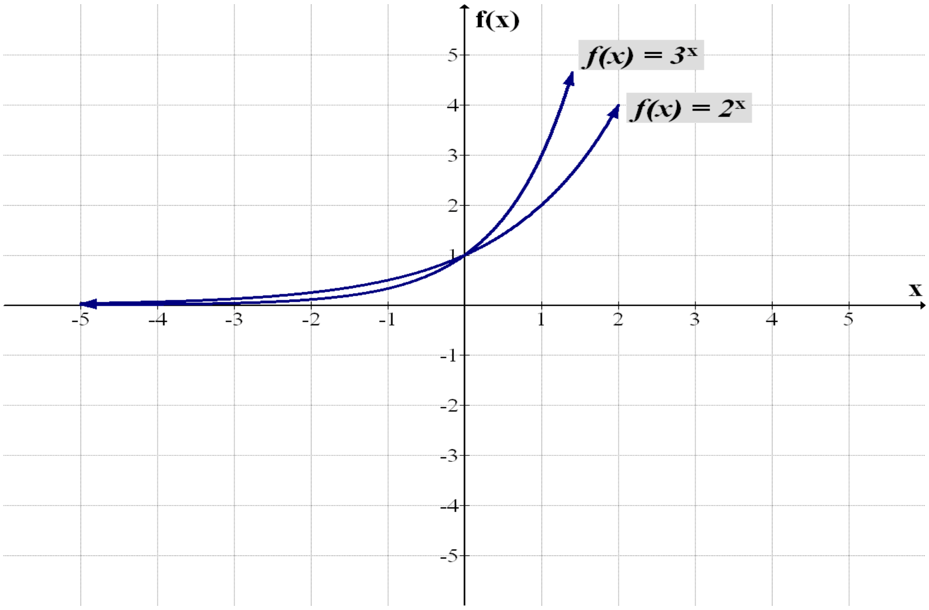
$f(x) = 3^x$ fonksiyonu ele alınırsa;

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	∞
$f(x)$	0	1/27	1/9	1/3	1	3	9	27	∞



Şekil 8.2: Üstel Fonksiyon Grafik Örneği

Yukarıda verilen örneklerden görülmektedir ki, taban (b), 1'den büyük ise fonksiyon sağa doğru artan fonksiyondur.

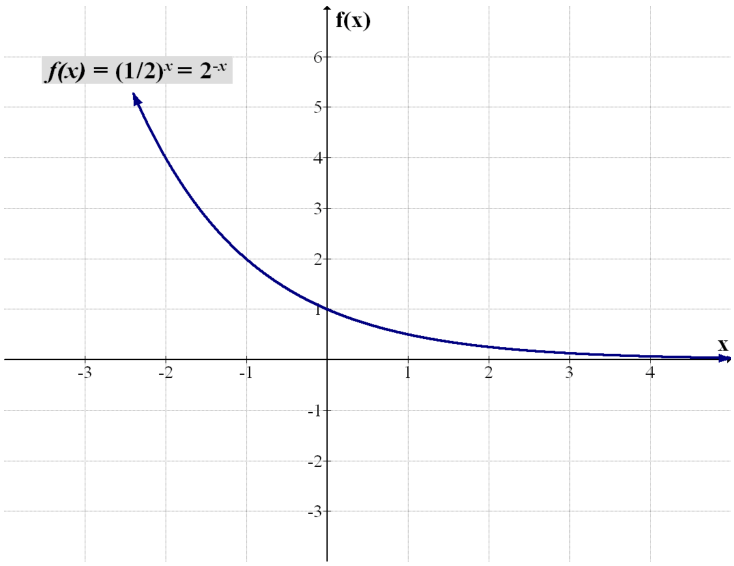


Şekil 8.3: Üstel Fonksiyonda Taban Farklılığı

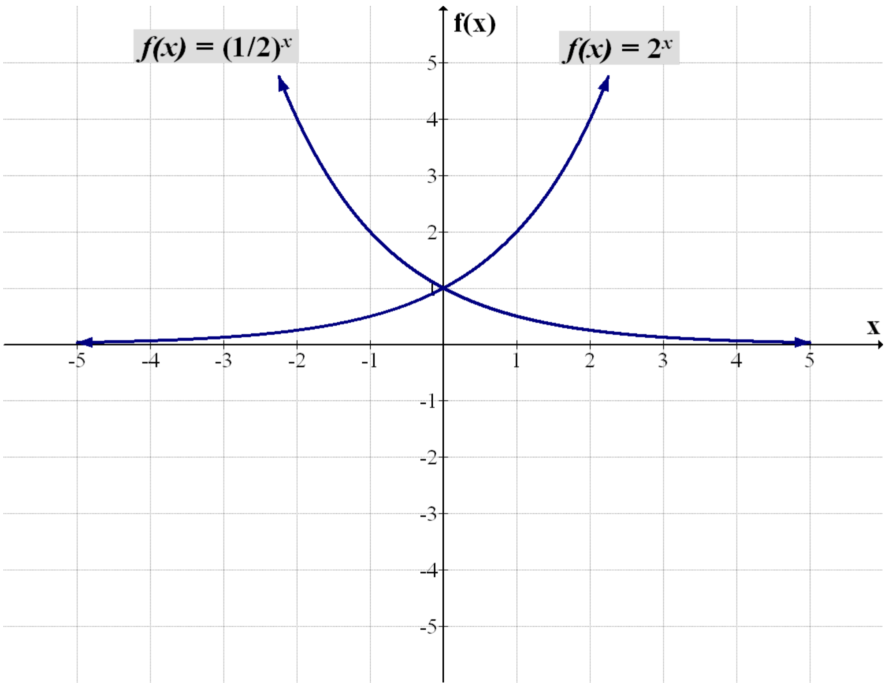
Üstel fonksiyonun tabanı (b), 0 ile 1 arasında bulunduğundan fonksiyon sağa doğru azalan fonksiyondur.

$f(x) = (1/2)^x$ = $f(x) = 2^{-x}$ fonksiyonu ele alınırsa;

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	∞
$f(x)$	0	8	4	2	1	1/2	1/4	1/8	∞



Şekil 8.4: Üstel Fonksiyonda Tabanın 1'den $(0 < b < 1)$ Küçük Olması Durumu



Şekil 8.5: Üstel Fonksiyonda Tabanların Farklı Olmasının Karşılaştırılması

8.2 Logaritma Fonksiyonu

$b \in R^+$ ve $b \neq 1$ olmak üzere, bire bir ve örten olan,

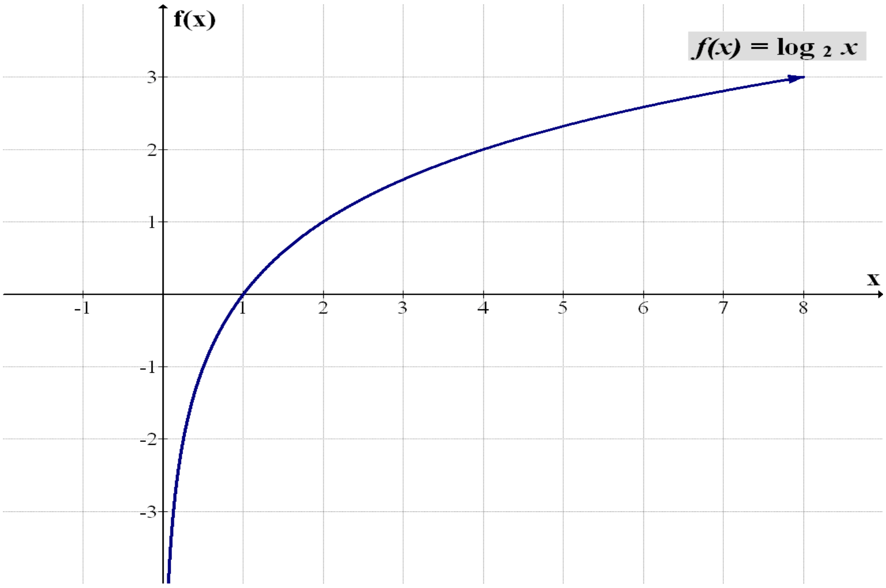
$$f: R \rightarrow R^+$$
$$f(x) = b^x$$

üstel fonksiyonunun tersine, ***a* tabanına** göre **logaritma fonksiyonu** denir. Fonksiyonun tanım kümesi pozitif reel sayılar, görüntü kümesi ise gerçel sayılar kümesini oluşturur.

$$f(x) = log_b\, x$$

Örneğin; $log_2 x$ fonksiyonunun grafiğini ele alırsak; fonksiyonun tanım kümesi pozitif reel sayılar, görüntü kümesi ise reel sayılardan oluşur. Aşağıdaki tabloda bu durum görülmektedir.

x	0	1/16	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	∞
$f(x)$	$-\infty$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	∞



Şekil 8.6: Logaritmik Fonksiyona Bir Örnek

biçiminde gösterilir. Tabanı yazılmadığında taban 10 demektir.

$$f(x) = log_{10}\, x \; = log\, x$$

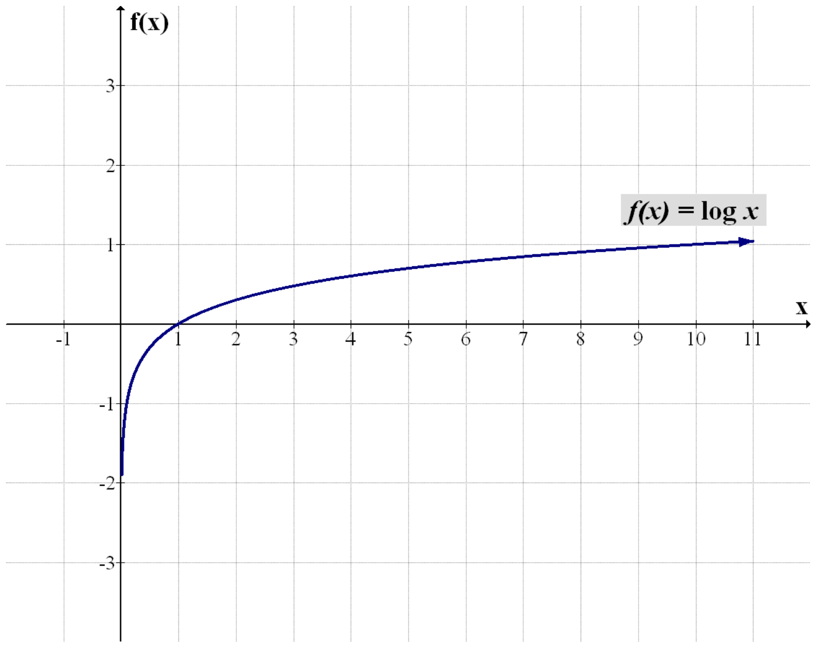
Örnek:
32 sayısının 2 tabanına göre logaritmasını bulunuz.

32 sayısı taban olan 2 nin kaçıncı kuvvetidir?

$$log_{2}\, 32 = y$$
$$2^y = 32$$
$$2^y = 2^5$$
$$y = 5$$

$f(x) = log_{10}\, x$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.

x	0	1/1000	1/100	1/10	1	10	100	1000	∞
$f(x)$	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	∞

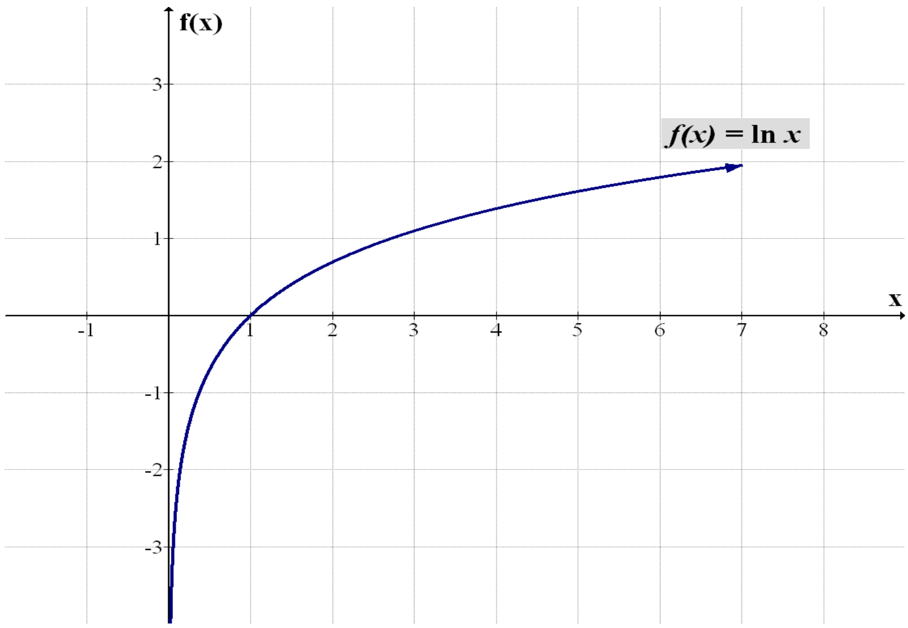


Şekil 8.7: 10 Tabanında Logaritma Fonksiyonu

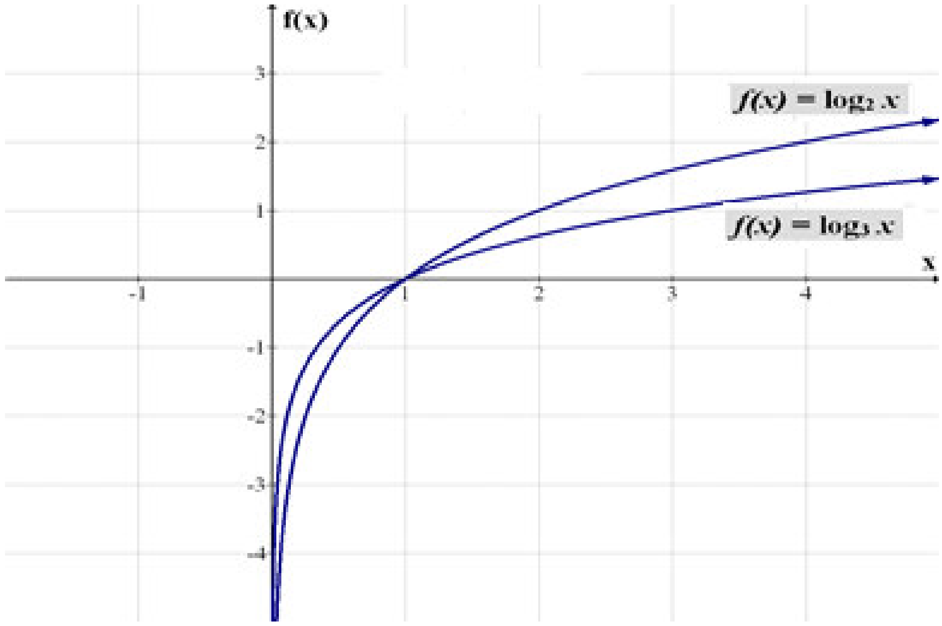
Taban e (e = 2,718281..) olduğunda doğal logaritma dediğimiz ln fonksiyonu oluşur.

$$f(x) = log_e\,x = ln\,x$$

x	0	$1/e^3$	$1/e^2$	$1/e$	1	e	e^2	e^3	∞
$f(x)$	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	∞



Şekil 8.8: *ln* Fonksiyonunun Grafiği



Şekil 8.9: Logaritmik Fonksiyonda Taban Farklılığının Gösterimi

8.2.1 Logaritmanın Özellikleri

1. $log_b x^n = n.log_b x$
2. $log_{10} x = \log x$
3. $log_b 1 = 0$
4. $log_b b = 1$
5. $log_b(x.y) = log_b x + log_b y$
6. $log_b(x/y) = log_b x - log_b y$
7. $log_a c = \frac{log_b c}{log_b a}$; $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$
8. $\ln x = \log_e x$; $e^{\ln x} = x$; $\ln(e^x) = x$

Örnek:

$$log_5 15 = log_5 (5.3) = log_5 5 + log_5 3 = 1 + log_5 3$$
$$log_2 21 = log_2 (3.7) = log_2 3 + log_2 7$$

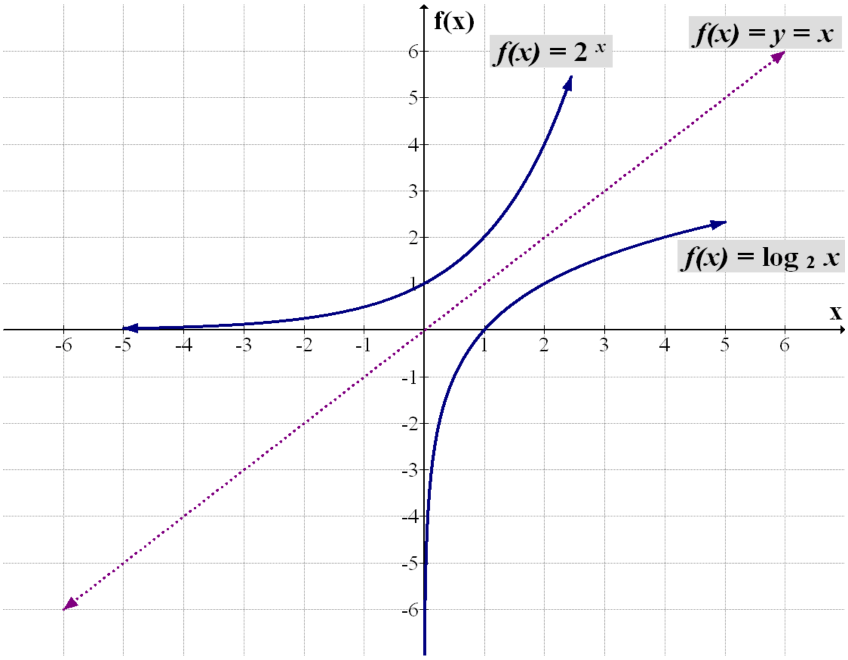
Örnek:

$$\begin{aligned}\log_{10} 50 + \log_{10} 2 &= \log_{10}(50 \cdot 2)\\ &= \log_{10}(100)\\ &= \log_{10} 10^2 = 2\log_{10} 10\\ &= 2\end{aligned}$$

8.3 Üstel ve Logaritmik Fonksiyon Karşılaştırması

Herhangi iki ters fonksiyon $y = x$ birim fonksiyonuna göre simetriktir. Aşağıda $f(x) = log_2 x, f(x) = 2^x$ fonksiyonlarının grafiklerinin birim fonksiyona göre simetrik olduğu görülmektedir. $f(x) = log_2 x, f(x) = 2^x$ fonksiyonları birbirinin tersidir. Birinin tanım kümesi diğerinin değer kümesidir.

$f(x) = log_2 x$		$f(x) = 2^x$	
8	3	3	8
4	2	2	4
2	1	1	2
1	0	0	1
1/2	-1	-1	1/2
1/4	-2	-2	1/4
1/8	-3	-3	1/8



Şekil 8.10: Üstel ve Logaritmik Fonksiyonun Aynı Grafik Düzlemde Gösterimi

Uygulamalar

2000 ve 2010 yıllarında yapılan genel nüfus sayımlarına göre Türkiye'nin nüfusu aşağıdaki tablo ile verilmiştir.

Sayım	**Nüfus**
21.10.2000	57 000 000
22.10.2010	68 580 000

Bu verilere göre Türkiye'nin yıllık nüfus artış hızı yaklaşık %1,85'tir. Aynı artış hızının süreceği kabul edilerek Türkiye'nin 2010'den sonra gelen bir t yılındaki P nüfusu;

$$N(t) = k.e^{0,0185.t}$$

$$N(0) = k.e^{0,0185.0} = 57.000.000$$

$$k = 57.000.000$$

$$N(t) = 57.000.000\ e^{0,0185.t}$$

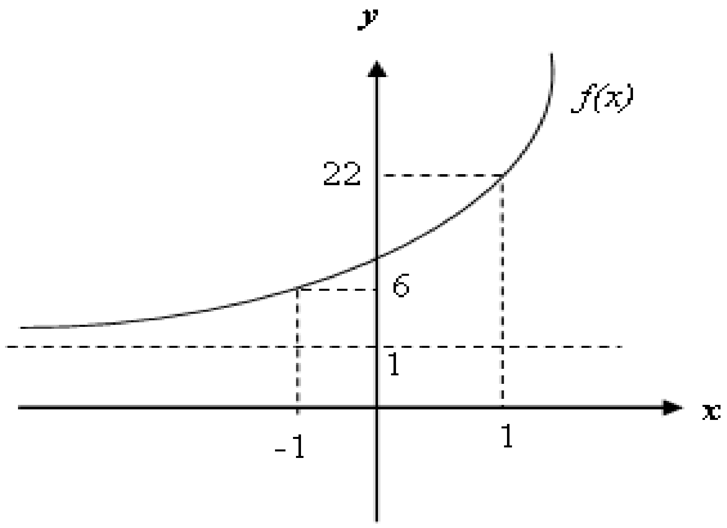
$N(t) = 57000000.e^{0,0185.t}$ [$t = 0$ (2000 yılı için) biçiminde modellenebilir.]

$T = 20$ ise, (2020 yılında)

$$N(t) = 57.000.000 \cdot e^{0,0185.20} \cong 82.520.000$$

Uygulama Soruları

1) $f(x) = a.3^{x+1} + b$ üstel fonksiyonun grafiği aşağıda verilmiştir. Bu grafiğe göre $f(0)$ kaçtır?



Çözüm:

$x = -1$ için $f(x) = 6$ $\quad 6 = a.3^{-1+1} + b \quad a.3^0 + b = 6 \quad a + b = 6$

$x = 1$ için $f(x) = 22$ $\quad 22 = a.3^{1+1} + b \quad a.3^2 + b = 6 \quad 9a + b = 22$

Bu durumda;

$$9a + b = 22$$
$$-a - b = -6$$

Her iki taraf, taraf tarafa toplanırsa;

$8a = 16 \qquad a = 2$

ve buradan $b = 4$ bulunur.

$$f(x) = 2.3^{x+1} + 4$$

$$f(x) = 2.3^{0+1} + 4 = 10$$

olarak bulunur.

2) $2^{x-1} = 6$ ise x kaçtır?

Çözüm:

$x - 1 = 2^6 \qquad x - 1 = 64 \qquad x = 63$

3) $ln(log\,x) = 0$ ise $x = ?$

Çözüm:

ln tabanı e olan logaritmadır.

$log\,x = e^0 \qquad log\,x = 1 \qquad x = 10^{\,1} = 10$

4) $y = 5 - x^2 - log_5(x + 7)$ fonksiyonunun tanım kümesi nedir?

Çözüm:

Logaritma fonksiyonu pozitif sayılar için tanımlıdır. Dolayısıyla,
$x+7>0$ yani $x>-7$ olmalıdır.

5) $y=log_2x$ ise $y=5$ için x kaçtır?

Çözüm:
$5=log_2x \rightarrow x=2^5=32$

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde üstel ve logaritmik fonksiyonun ne oldukları tartışılmış, bu fonksiyonların grafiklerinin çizimlerinin yapılışı anlatılmıştır. Üstel ve logaritmik fonksiyonun kullanım alanları ve aralarındaki farka vurgu yapılmış ve nüfus problemi örneği ile konu desteklenmiştir.

Bölüm Soruları

1) $y = 2^{0,1x} + 3$ fonksiyonu ne tip bir fonksiyondur?

a) Polinom fonksiyon
b) Doğrusal fonksiyon
c) Kuadratik fonksiyon
d) Üstel fonksiyon
e) Logaritmik fonksiyon

2) Nüfusu 2500 olan bir kasabanın nüfus artış hızı yıllık % 2 olduğuna göre 5 yıl sonraki kasabanın tahmini nüfusu en yakın tamsayı olarak ne kadar olur?

a) 2706 b) 2750 c) 2760 d) 2815 e) 3000

3) $f = 16^x$ fonksiyonunda $f(1/4)$ kaçtır?

a) 2 b) 4 c) 1/2 d) 1/4 e) 16

4) $f(x) = 16^{-x}$ fonksiyonunda $f(1/2)$ değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a) 2 b) 4 c) 1/2 d) 1/4 e) 16

5) $\log_6(x-2) + \log_6(x+3) = 1$ eşitliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\{4,-3\}$ b) $\{3\}$ c) $\{-2,3\}$ d) $\{-4,3\}$ e) $\{\ \}$

6) $f(x) = 4^x$ fonksiyonu için, $f(-2)$ kaçtır?

a) 1/32 b) 1/16 c) 1/8 d) 1/4 e) $-1/16$

7) $y = ln\ (x-3)$ fonksiyonunun tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

a) $(-\infty, 0)$ b) $(0, \infty)$ c) $(3, \infty)$ d) $[3, \infty)$ e) $(-\infty, \infty)$

8) $\log_2 16 + \log_3(1/9)$ değeri kaça eşittir?

a) -4 b) -2 c) 1 d) 2 e) 4

9) 15000 nüfuslu bir ilçenin nüfusu her yıl % 3 artmaktadır. İlçenin bu nüfus artışı ile kaç yıl sonra nüfusu 16883 olur?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

10) Nüfusu 40.000 olan bir ilçenin nüfus artış hızı yıllık %3 olduğuna göre 4 yıl sonraki kasabanın tahminî nüfusu en yakın tamsayı olarak ne kadar olur?

a) 44800 b) 45020 c) 48000 d) 52000 e) 60000

Cevaplar

1) d, 2) c, 3) a, 4) d, 5) b, 6) b, 7) c, 8) d, 9) d, 10) b

9. FİNANS MATEMATİĞİ

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

9.1. Faiz Problemi
9.2. Basit Faiz
9.3. Bileşik Faiz Formülü
9.4. Bugünki Değer Hesabı
9.5. Efektif Faiz
9.6. Anüite Hesabı
9.7. Anüitelerin Bugünki Değeri
9.8. Anüitelerin Gelecekteki Değeri

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1) Basit faizle bileşik faiz arasında ne fark vardır?

2) Günümüzde basit faiz nerede uygulanmaktadır?

3) Anüite ne demektir?

4) Kredi geri ödemeleri hesabı nasıl yapılır?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	**Kazanım**	**Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği**
Basit Faiz	Basit Faiz Problemini hesaplayabilmek	Okuyarak, fikir yürüterek
Bileşik Faiz Formülü	Bileşik Faiz Formülünü kavramak	Okuyarak, soru çözerek
Bugünkü Değer	Denklemleri çözebilmek	Okuyarak, soru çözerek
Anüite Hesapları	Taksit hesabı yapabilmek	Okuyarak, uygulama yapma, soru çözerek

Anahtar Kavramlar

- Basit Faiz
- Bileşik Faiz
- Efektif Faiz
- Bugünki Değer
- Anüite (Taksit Hesabı)

Giriş

İşletmeler ve şahısların sahip oldukları mal veya sermayenin kullanım hakkını belirli bir süre için belirli bir getiri oranı ile bir başkasına devredilmesi sürecinde elde edilen getiri faiz olarak adlandırılmaktadır. Dönem sonunda anaparaya eklenmesi veya eklenmemesi durumuna göre faiz basit ve bileşik faiz olarak ikiye ayrılmaktadır. Her iki kullanım da matematiksel anlamda aritmetik ve geometrik dizilerin bir uygulaması olarak incelenebilir.

Finans matematiği bölümünde amaç öğrenciyi paranın zaman değeri hakkında bilgilendirerek üstel fonksiyonlar, logaritmik fonksiyon ile birlikte dizi ve serilerin işletme uygulamaları sunulmaktadır. İlerleyen bölümlerde limit kavramının açıklanması ile birlikte finans matematiğinin daha detaylı uygulamalarına tekrar değinilecektir.

9.1 Basit Faiz

Belirli bir anaparanın $\boldsymbol{P}$ belirli bir faiz oranı üzerinden ($\boldsymbol{r}$), belirli bir zaman periyodunda ($\boldsymbol{t}$), her dönem için ayrı ayrı hesaplanması sonucu elde edilen faiz basit faiz olarak adlandırılır. Yukarıdaki sembollerin kullanılması ile birlikte basit faiz formülü aşağıdaki gibi verilebilir.

$$I = P.r.t$$

Dikkat edilecek nokta faiz oranı ve zaman periyodunun uygun hâle getirilmesidir. Örneğin anaparanın 44 hafta değerlendirilmesi durumunda, $t = 44/52 \cong 0{,}846$ olarak düzenleme yapılmalıdır.

Örnek:

8000$'lık anaparanın iki yıl boyunca %8 basit faiz ile değerlendirilmesi sonucu elde edilecek faiz getirisini hesaplayınız.

b) 4000$'lık borç 9 ay sonra %10 basit faiz ile geri ödenecektir. Geri ödenmesi gereken miktarı hesaplayınız.

a)

$$I = P.r.t \ = \ 8000.0{,}08.2 \ = \ 1280 \ \$$$

b)

$$t = {}^{9}\!/_{12} = 0{,}75$$

$$I = P.r.t \ = \ 4000.0{,}10.0{,}75 \ = \ 300 \ \$$$

Örnek:

Bir yatırımcı %8 basit faize göre 3 aylığına yatırdığı parasına 400$ faiz almıştır. Yatırımcının değerlendirdiği anapara ne kadardır?

Çözüm:

$$t = 3/12 = 0{,}25$$

olduğundan,

$$I = P.r.t$$

$$400 = P.0{,}08.0{,}25$$

$$P = 400/0{,}08.0{,}25$$

$$P = 2000 \ \$$$

9.2 Basit Faiz İle Yatırımın Gelecekteki Değeri

Paranın gelecekteki değeri için S sembolünün kullanılması hâlinde bir yatırımın gelecekteki değeri,

$$S = P + I$$

veya

$$S = P(1 + r.t)$$

formülü ile hesaplanmaktadır. Benzer biçimde bir yatırımın geçmişteki değeri tersine bir hesap ile $P \ = \ S - \ I$ bağıntısı ile elde edilebilir.

Örnek:

1200$ tutarındaki bir anapara %12 basit faiz altında bankaya yatırılmıştır. Kaç yıl sonra yatırılan anapara 1800$ miktarına ulaşır?

$$S = P + I$$

$$1800 = 1200 \ (1 + 0{,}12.t)$$

$$t = 600/144$$
$$t = 4{,}17 \text{ yıl}$$

9.3 Bileşik Faiz

Basit faiz kavramının günlük hayat içerisindeki uygulamaları kısıtlı olmaktadır. Bunun yerine dönem içerisinde elde edilen getirilerin de tekrar anapara içerisine eklendiği bileşik faiz uygulamalarına ise sıklıkla başvurulmaktadır.

$\boldsymbol{P}$ dönem başında elde bulundurulan anapara miktarını temsil ettiğini varsayalım. Dönem içerisinde faizin $\boldsymbol{r}$ olması hâlinde dönem sonunda elde edilecek faiz $\boldsymbol{P.r}$ olarak gerçekleşecektir. Bu faizin tekrar anaparaya eklenmesi ile birlikte dönem sonunda elde edilen faiz ile birlikte anapara yani $\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P.r}$ bulunacaktır. Benzer bir biçimde gerçekleştirdiğimiz işlemi ardışık dönemler için inceleyecek olursak aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$t = 0 \ \rightarrow P$$
$$t = 1 \ \rightarrow P + Pr = P(1 + r)$$
$$t = 2 \ \rightarrow P(1 + r) + P(1 + r).r = P(1 + r)[1 + r] = P(1 + r)^2$$
$$t = n \ \rightarrow P(1 + r)^{n-1} + P(1 + r)^{n-1}.r = P(1 + r)^{n-1}[1 + r] = P(1 + r)^n$$

Böylelikle, $\boldsymbol{r}$ faiz oranı ile $\boldsymbol{n}$ dönem boyunca değerlendirilen $\boldsymbol{P}$ miktarındaki anaparanın gelecekteki değeri $\boldsymbol{S}$ ile gösterilmek üzere, aşağıda verilen formül ile elde edilecektir.

$$S = P.(1 + r)^n$$

Bileşik faiz ile basit faiz arasındaki en önemli fark, bileşik faiz altında her bir yatırım periyodunun sonunda anaparadan elde edilen faizin tekrar anaparaya eklenmesidir. Bu şekilde anaparada üstel bir büyüme sağlanmaktadır. Basit faizde paranın gelecekteki değerini ifade eden fonksiyon doğrusal fonksiyon olmasına karşın bileşik faiz ile paranın gelecekteki değeri üstel bir fonksiyondur.

Örnek:

2000 TL'lik bir yatırımın 4 sene boyunca %8 bileşik faiz ile değerlendirilmesi sonucu ne kadar getiri elde edilebilecektir?

Çözüm:

$$S = P(1 + r)^4$$
$$S = 2000\ (1 + 0{,}08)^4$$
$$S = 2000.1{,}3605 = 2721$$
$$\text{Getiri (Faiz Miktarı)} = 2721 - 2000 = 721 \text{ TL}$$

Yukarıdaki örnekte belirli bir faiz oranı altında yapılan yatırımından belirli bir dönem sonunda elde edilecek kazanç hesaplanmıştır. Benzer biçimde faiz oranı ve gelecekteki değer biliniyor iken dönem sayısı logaritma kullanarak elde edilebilecektir.

Örnek:

Bir yatırımın %8 bileşik faiz ile iki katına çıkabilmesi için yaklaşık kaç yıl geçmelidir?

Çözüm:

$$2P = P \cdot (1 + 0{,}08)^n$$
$$2 = (1{,}08)^n$$
$$\log 2 = \log\ (1{,}08)^n$$

$$0{,}301 = n.\,0{,}33$$
$$n \cong 9{,}12 \text{ yıl}$$

Örnek:

800$'lık yatırım %kaç bileşik faiz altında değerlendirilirse 4 yıl içerisinde 134,88$ kazandırır?

Çözüm:

$$800 + 134{,}88 = 800(1 + r\,)^4$$
$$934{,}88 = 800 \cdot (1 + r\,)^4$$
$$1{,}1686 = (1 + r\,)^4$$
$$r = \sqrt[4]{1{,}1686} - 1$$
$$r \cong 0{,}04 = \%\,4$$

Yukarıda incelenen örneklerde her bir dönem 1 yıl olarak değerlendirilmiştir. Ancak dönemler bazen bir yılın altında altı aylık, üç aylık, aylık ve hatta günlük olarak göz önüne alınabilir. Bu gibi durumlarda dikkat edilecek nokta paranın değerlendirileceği toplam dönem sayısını belirlemektir. Aynı zamanda, yıl içerisindeki dönem sayısının birden fazla olduğu durumlarda bir yıl için dönem sayısı ve faiz oranı yeniden hesaplanarak aşağıda verilen formül elde edilecektir.

Dönem sayısı; $n \rightarrow k.n$

Faiz oranı; $r \rightarrow \; r\,/\,k$ olmak üzere,

$$S = P(1 + r)^n$$
$$\mathrm{S} = P\left[1 + \frac{r}{k}\right]^{k.n}$$

Örnek:

%8 yıllık faiz üzerinden üç aylık olarak bankaya yatırılan 500 TL'lik bir yatırım 4 yılın sonunda ne kadar olur?

Çözüm:

$$S = P(1 + r)^n = P\left[1 + \frac{r}{k}\right]^{k.n}$$
$$S = 500.\left[1 + \frac{0{,}08}{4}\right]^{4.4}$$
$$\mathrm{S} = 500.\,[1 + 0{,}02]^{16}$$
$$\mathrm{S} = 686{,}4 \text{ TL}$$

9.4 Efektif Faiz

Yıl içerisindeki dönem sayısının artması ile birlikte **efektif faiz oranı** kavramı ortaya çıkmaktadır. Nominal faiz oranı her bir yatırım için aynı olsa dahi yıl içerisindeki dönem sayısı arttıkça yatırımcının elde edeceği getiride artış meydana gelmektedir.

Tablo 9.1 Dönemlik Faiz Kıyaslaması

Mevduat Türü	Dönem Sayısı	Efektif Oran Hesabı	Getiri Oranı
Yıllık	1	$(1 + 0{,}12\,)^1 - 1 = \; 1{,}12 - 1$	%12
Altı-aylık	2	$(1 + 0{,}12\,)^2 - 1 = \; 1{,}1236 - 1$	%12,36

Üç-aylık	4	$(1+0{,}12\ )^4-1=\ 1{,}1255-1$	%12,55
Aylık	12	$(1+0{,}12\ )^{12}-1=\ 1{,}1268-1$	%12,68
Günlük	365	$(1+0{,}12\ )^{365}-1=\ 1{,}1274-1$	%12,74

bankaya 1$ yatıran yatırımcı yıl içerisindeki dönem sayısı 1 iken 1,12 $ elde etmekte, yatırımın altı aylık olarak yapılması durumunda yani dönem sayısı iken dönem sonunda yatırımcı 1,1236 $ elde etmektedir. Daha detaylı bir inceleme ile Tablo 9.1 elde edilecektir.

Görüldüğü üzere her bir durumda nominal faiz oranı %12 olduğu halde dönem sayısı arttıkça elde edilen kazanç artmaktadır. Yukarıdaki tablonun son sütununda verilen getiri oranı, efektif faiz oranı olarak adlandırılmakla birlikte paranın gelecekteki değeri formülü kullanılarak elde edilebilecektir.

$$P(1+r)^n = P\left[1+\frac{r}{k}\right]^{k.n}$$

$$(1+r)^n = \left[1+\frac{r}{k}\right]^{k.n}$$

$$(1+r) = \left[1+\frac{r}{k}\right]^{k}$$

$$r_{ef} = \left[1+\frac{r}{k}\right]^{k} - 1$$

Örnek: Bir yatırımcı parasını % 6 nominal faiz üzerinden üç-aylık veya % 6,1 üzerinden altı-aylık olarak değerlendirme şansına sahiptir. Sizce hangi alternatifi tercih etmelidir?

Çözüm:

% 6 için; $r_{ef} = \left[1+\frac{0{,}06}{4}\right]^4 - 1 = 0{,}0614 = \%\ 6{,}14$

% 6,1 için;

$$r_{ef} = \left[1+\frac{0{,}061}{2}\right]^2 - 1 = 0{,}0613 = \%\ 6{,}19$$

İkinci alternatife ait efektif oran daha yüksek olduğundan % 6,1 teklifi tercih edilmelidir.

9.5 Bugünkü Değer

Zaman zaman bir yatırımın gelecekteki değerini bilmek kadar bugünkü değerini bilmek de önem kazanmaktadır. Gelecekteki değeri bilinen bir yatırımın belirli bir faiz oranı altında bugünkü değerini hesaplamak için bir önceki bölümde verilen bir yatırımın gelecekteki değeri denklemi kullanılacaktır.

$$S = P(1+r)^n$$

Yukarıda verilen denklemin her iki tarafı $(1+r)^n$'e oranlandığı takdirde bir yatırımın geçmişteki değeri formülü elde edilir.

$$\frac{S}{(1+r)^n} = \frac{P(1+r)^n}{(1+r)^n} \quad \rightarrow \quad \frac{S}{(1+r)^n} = P$$

$$P = S(1+r)^{-n}$$

Benzer bir biçimde bir yıl içerisindeki dönem sayısının birden fazla olması durumunda,

$$P = S\left[1+\frac{r}{k}\right]^{-k.n}$$

bağıntısı kullanılabilecektir.

Örnek:

Dört yıl sonra üniversite eğitimine başlayacak çocuğunuzun masraflarını karşılamak amacıyla bankaya bir miktar para ayırmak istiyorsunuz. Dört yılın sonunda bankadaki miktarın %12 bileşik faiz altında 10.000TL olabilmesi için bugün bankaya yatırmanız gereken para miktarı nedir?

Çözüm:

$$P = S(1+r)^{-n}$$
$$P = 10000(1+0{,}12)^{-4}$$
$$P = 10000.(0{,}6355) = 6355 \text{ TL}$$

9.6 Anüite

Yatırımların bugünkü veya gelecekteki değerini incelerken büyük miktarlarda paraların bugünkü veya gelecekteki değerlerinin hesaplandığını görürüz. Ancak gerçek hayatta her bireyin bütçesi bu kadar büyük miktarda paraları borçlanmayı karşılayamayacaktır. Örneğin eğitimi için para biriktirmek isteyen babanın nakit 6.355 TL'si bulunmayabilir. Gerçek hayatta bu gibi durumlarda ödemelerin belirli dönemlerle eşit taksitlere ayrıldığını görürüz. İşte belirli dönemlerle eşit taksitlerde ödenecek bu miktarlar **anüite** olarak adlandırılmaktadır.

Ardışık iki terimi arasındaki oran sabit olan diziler Geometrik Dizi olarak adlandırılır. Geometrik dizinin ardışık terimleri arasındaki bu sabit orana ortak çarpan adı verilir.

$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ bir geometrik dizinin terimleri olmak üzere, (a_n, dizinin n. terimi) terimler arasındaki oran sabit olduğundan (k), her bir terim dizinin ilk terimi olan a_1 cinsinden ifade edilebilir.

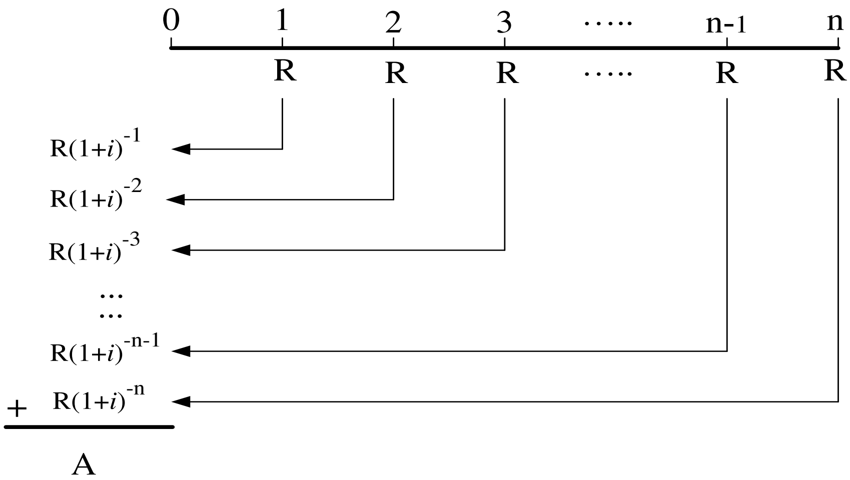
$$a_1 = a_1; \quad a_2 = a_1.k; \quad a_3 = a_1.k^2; \quad a_4 = a_1.k^3; \ \cdots; \ a_n = a_1.k^{n-1}$$

Finans matematiğinde anüitelerin bugünkü ve gelecekteki değerinin hesaplanmasında geometrik dizi (geometrik seri) toplam formülü kullanılmaktadır. Bu noktada geometrik dizide ilk n terim toplamının hesaplanmasına ilişkin formülün bilinmesi gerekmektedir. Bu konu ayrı bir başlık altında incelenmeyecek, anüitelerin bugünkü ve gelecekteki değerleri toplamı altında formüllerin çıkarılışı açıklanacaktır. Ancak kısaca geometrik seri terim toplamı formülü aşağıdaki gibidir.

$$S = \frac{a_1(1-k^n)}{1-k}$$

9.6.1 Anüitenin Bugünkü Değeri

Anüite içerisindeki her bir eşit ödeme miktarının bugünkü değerleri toplamı anüitelerin bugünkü değeri olarak adlandırılır. Anüiteler ödemelerin yılsonu ve yılbaşında olmasına göre ikiye ayrılmaktadır. Şimdi anüitelerin bugünkü değeri formülünü elde etmeye çalışalım.



$$A = R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + R(1+i)^{-3} + \cdots + R(1+i)^{-n}$$

$$A = R(1+i)^{-1}.[1 + R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + R(1+i)^{-3} + \cdots + R(1+i)^{-n+1}]$$

$$A = \frac{R(1+i)^{-1}[1-(1+i)^{-n}]}{1-(1+i)^{-1}} = \frac{R[1-(1+i)^{-n}]}{(1+i)[1-(1+i)^{-1}]}$$

$$A = \frac{R[1-(1+i)^{-n}]}{(1+i)-1}$$

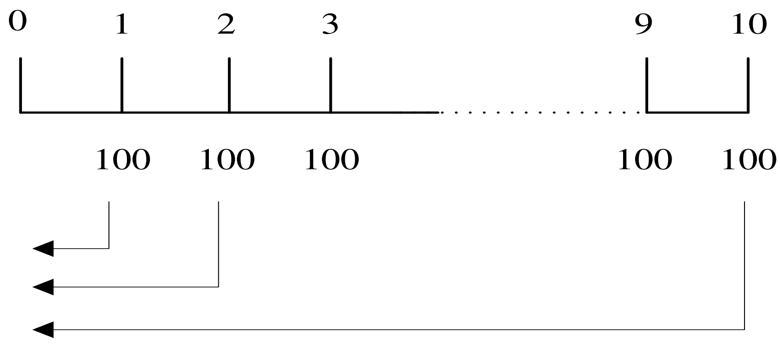
Ödemelerin n dönem boyunca süreceği ve ilk ödemenin birinci yılın sonunda yapılacağı varsayımı altında anüitelerin bugünkü değeri toplamı,

$$A = R.[\frac{1-(1+i)^{-n})}{i}]$$

Örnek:

Her yıl sonunda %6 bileşik faize göre 10 yıl boyunca yapılan 100TL'lik ödemelerin bugünkü değerleri toplamını elde ediniz.

Çözüm:



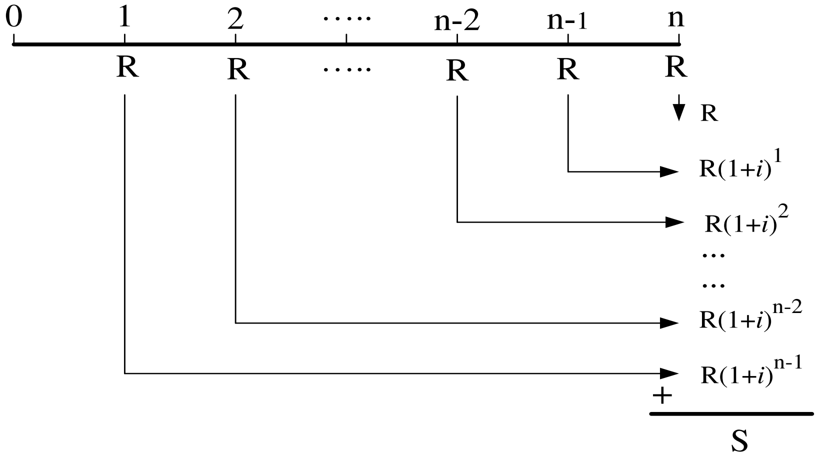
$$A = R.\left[\frac{1-(1+i)^{-n})}{i}\right] = 100.\left[\frac{1-(1+0{,}06)^{-10})}{0{,}06}\right]$$

$$A = 100.\frac{0{,}4416}{0{,}06} = 736 \text{ TL}$$

aYukarıda verilen örnekte ödemeler her yıl sonunda gerçekleşmektedir. Ancak daha önceki bölümlerden de hatırlayacağımız üzere ödemeler yıl içerisinde birden fazla kez gerçekleşebilir. Bu durumda yukarıda verilen anüitelerin bugünkü değer formülü, k bir yıl içerisindeki dönem sayısı olmak üzere, aşağıdaki gibi düzeltilmelidir.

$$A = R.\frac{\left[1-\left(1+\frac{r}{k}\right)^{-k.n}\right]}{\frac{r}{k}}$$

9.6.2 Anüitenin Gelecekteki Değeri



$$S = R + R(1+i) + R(1+i)^2 + R(1+i)^3 + \cdots + R(1+i)^{n-1}$$

$$S = R.[1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \cdots + (1+i)^{n-1}]$$

$$S = \frac{R[1-(1+i)^n]}{1-(1+i)} = R.\frac{1-(1+i)^n}{-i} = R.\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

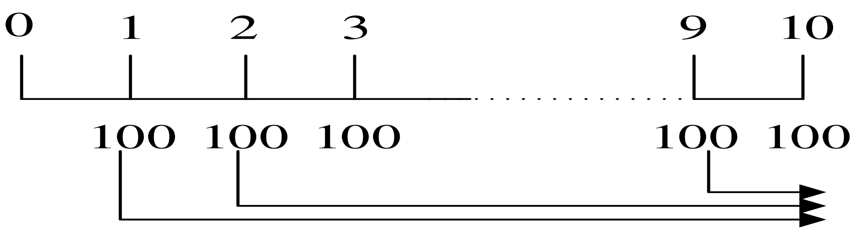
Anüitelerin gelecekteki değeri, dönem içerisinde yapılan her bir ödemenin dönem sonundaki toplam değeridir. Anüitelerin bugünkü değerine benzer bir biçimde elde edilir. Ödemelerin n dönem boyunca süreceği ve ilk ödemenin birinci yılın sonunda yapılacağı varsayımı altında anüitelerin gelecekteki değeri toplamı,

$$S = R.[\frac{(1+i)^n-1}{i}]$$

Örnek:

Her yıl sonunda %8 bileşik faiz ile 10 yıl boyunca bankaya yatırılan 1000$'ın 10. yıl sonundaki toplam değerini hesaplayınız.

Çözüm:



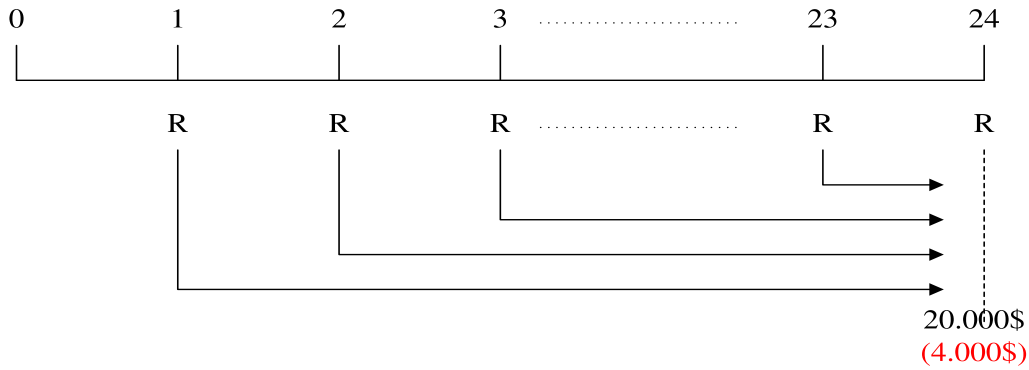
$$A = R.\left[\frac{(1+r)^n-1}{r}\right] = 1000.\left[\frac{(1+0{,}08)^{10}-1}{0{,}08}\right] = 14486{,}25 \text{ TL}$$

Yukarıda verilen örnekte ödemeler her yıl sonunda gerçekleşmektedir. Ancak daha önceki bölümlerden de hatırlayacağımız üzere ödemeler yıl içerisinde birden fazla kez gerçekleşebilir. Daha önce de açıklandığı üzere yukarıda verilen anüitelerin gelecekteki değeri formülü, k bir yıl içerisindeki dönem sayısı olmak üzere, aşağıdaki gibi düzeltilmelidir.

$$A = R.\left[\frac{(1+\frac{r}{k})^{k.n}-1}{\frac{r}{k}}\right]$$

Örnek:

SOLE Tekstil kullanmakta olduğu bir örme makinesini iki sene sonra değiştirmeyi planlamaktadır. Makinenin ikinci yıl sonundaki hurda değeri 4.000$, alınması düşünülen makinenin değeri ise 20.000$'dır. Makineyi satın alabilmek amacıyla bir fon oluşturulacak ve iki yıl boyunca her ay sonunda eşit miktarda para bu fonda değerlendirilecektir. Yıllık bileşik faizin %12 olması hâlinde her ay sonunda fona yatırılması gereken para miktarını bulunuz.



Çözüm:

$$20000-4000 = R\left[\frac{\left(1+\frac{0,12}{12}\right)^{24}-1}{\frac{0,12}{12}}\right]$$

$$16000 = R\left[\frac{0,2697}{0,01}\right]$$

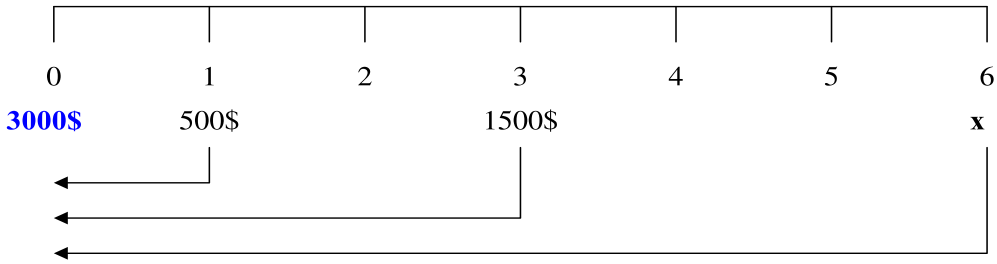
$$R \cong 593,25\ \$$$

Uygulama Soruları

1) Bir firma yıllık %20 kâr sağlayan bir işe her yıl 1000 TL yatırım yapmaktadır. Yapılan yatırımların 10. yıl sonundaki değerini bulunuz.

$$S = P.[(1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \cdots + (1+i)^{10}]$$
$$S = 1000[(1+0{,}2) + (1+0{,}2)^2 + (1+0{,}2)^3 + \cdots + (1+0{,}2)^{10}]$$
$$S = 1000[(1{,}2) + (1{,}2)^2 + (1{,}2)^3 + \cdots + (1{,}2)^{10}] = 1000S_1$$
$$S_1 = 1{,}2\left[\frac{1-1{,}2^{10}}{1-1{,}2}\right] = \frac{1{,}2.5{,}192}{0{,}2} = 31{,}152$$
$$S = 1000S_1 = 1000.31{,}152 = 31152$$

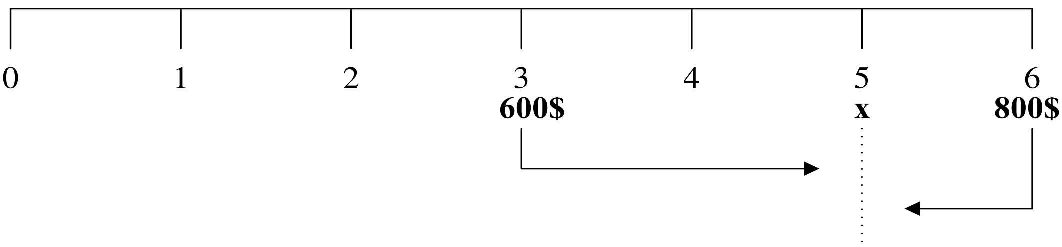
2) 3000$'lık bir borç 6 yıl içerisinde geri ödenmek üzere alınıyor. 500$ tutarındaki ilk taksit birinci yılın sonunda, 1500 $ tutarındaki ikinci taksit üçüncü yılın sonunda ödenmek zorunda olduğuna göre, altıncı yılın sonunda ödenmesi gereken miktarı yıllık faizin %6 olması durumunda hesaplayınız.



$$3000 = 500\,(1+0{,}06)^{-1} + 1500\,(1+0{,}06)^{-3} + x\,(1+0{,}06)^{-6}$$
$$3000 = 500\,(0{,}9434) + 1500\,(0{,}8396) + x\,(0{,}7049)$$
$$3000 = 1731{,}1 + 0{,}7049x$$
$$1268{,}9 = 0{,}7049x$$
$$x \cong 1800\$$$

3) Bundan üç yıl sonra ödenmek üzere 600$ ve altı yıl sonra ödenmek üzere 800$'lık borçlarınız olduğunu varsayalım. Borcu aldığınız kişi üçüncü yılda ödemeniz gereken borcu erteleyerek beşinci yılda tek bir ödeme yapmayı teklif ediyor. Yıllık bileşik faizin %8 üzerinden altı-aylık hesaplanması durumunda beşinci yılda yapmanız gereken ödeme ne kadardır?

Çözüm:



$$x = 600.\left(1+\frac{0{,}08}{2}\right)^4 + 800.\left(1+\frac{0{,}08}{2}\right)^{-2}$$
$$x = 600.1{,}0824 + 800.0{,}9612$$
$$x = 1418{,}39$$

4) 100 TL'yi %12 faiz oranı ile bankaya yatırdığımızda, paranın 1. yıl sonundaki toplam miktarı ne kadar olur?

Çözüm:

$$S = P.(1 + i) = 100.(1 + 0{,}12) = 100.1{,}12 = 112 \text{ TL}$$

5) 100 TL'yi %10 faiz oranı ile bankaya yatırdığımızda, paranın 2. yıl sonundaki toplam miktarı ne kadar olur?

Çözüm:

$$S = P.(1 + i) = 100.(1 + 0{,}10)^2 = 100.1{,}21 = 121 \text{ TL}$$

6) Aylık vadeli mevduata uygulanan yıllık faiz oranı %12 ise 100 TL'yi bankaya yatırdığımızda, paranın 1. ay sonundaki toplam miktarı ne kadar olur?

Çözüm:

$S = P.\left(1 + \frac{i}{k}\right) = 100.(1 + \frac{0{,}12}{12}) = 100.1{,}01 = 101 \text{ TL}$

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde basit faiz, bileşik faiz, efektif faiz, baranın bugünkü değeri, gelecekteki değeri, efektif oran, anüite kavramları verilmiştir. Bu kavramlar işletmeciliğin temel konularındandır. Konunun iyi anlaşılması için çokça tekrar edilmesinde yarar vardır.

Bölüm Soruları

1) %8 nominal faiz ile bankaya yatırılan para üç yıl sonunda 6298,56 TL olduğuna göre başlangıçta yatırılan anapara ne kadardır?

a) 6000 b) 5500 c) 5000 d) 4000 e) 3500

2) %10 yıllık nominal faizle vadeli mevduat hesabına 1000 TL para yatıran bir kişinin üç sene sonunda mevduat hesabında toplam ne kadar parası olur?

a) 1000 b) 1100 c) 1210 d) 1300 e) 1331

3) Bankadan dosya masrafsız ve vergiler dâhil %6 nominal faiz oranı (Aylık mevduat hesabına uygulanan yıllık faiz oranı %6'dır) ile çekilen 6000 TL kredinin 12 ay boyunca geri ödemesinde, aylık ödeme yaklaşık tam sayı ile ne kadar olur?

a) 502,5 b) 517 c) 520 d) 525 e) 550

4) Bir ülkedeki enflasyon oranı son 2 yılda sırasıyla %5 ve %7 olarak hesaplandığına göre dönem başında çavdarlı özel ekmeğin fiyatı 2 liradan iki yılın sonunda yaklaşık olarak kaç liraya çıkmış olur?

a) 2,25 b) 2,00 c) 2,10 d) 2,75 e) 3,00

5) Yıllık nominal faiz %12 ise, yıllık vadeli mevduata 100 TL yatırım yapan bir kişi kaç TL faiz geliri elde eder?

a) 100 b) 112 c) 110 d) 51 e) 12

6) Her ayın sonunda aylık vadeli mevduat hesabına 100 TL yatıran bir öğrencinin yılsonunda bankadaki toplam parası yaklaşık tamsayı ile ne kadar olur? (Aylık mevduat hesabına uygulanan yıllık nominal faiz oranı %6'dır)

a) 1233,56 b) 1300,25 c) 1200,05 d) 1180 e) 1050,66

7) Bir ürünün birim satış fiyatının %40'ı birim kâr ise, ürünün birim maliyet üzerinden bu kâr yüzde kaç olur?

a) 60 b) 55 c) 50 d) 67 e) 25

8) Bir ülkede enflasyon oranı, reel faiz oranlarından yüksek ise aşağıdakilerden hangisi olur?

a) Reel büyüme pozitif olur.
b) Reel büyüme negatif olur.
c) Aynı para ile daha fazla miktarda ürün satın alınır.
d) Aynı para ile ayı miktarda ürün satın alınır
e) Ekonomi iyiye gider.

9) $(3 + 9 + 27 + \cdots + 3^{10}) = ?$ toplamı kaçtır?

a) 9840 b) 49049 c) 177147 d) 29523 e) 88572

10) %10 yıllık nominal faizle vadeli mevduat hesabına 100 TL para yatıran bir kişinin iki sene sonunda mevduat hesabında toplam ne kadar parası olur?

a) 100 b) 110 c) 112 d) 120 e) 121

Cevaplar

1) c, 2) e, 3) b, 4) a, 5) e, 6) a, 7) d, 8) b, 9) e, 10) e

10. FONKSİYONLARDA LİMİT VE SÜREKLİLİK

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

10.1. Limit Tanımı
10.2. Sağdan Limit
10.3. Soldan Limit
10.4. Sonsuzda Limit
10.5. Süreklilik Kavramı

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1) Fonksiyonlar için limit nasıl tanımlanır?

2) Bir fonksiyon ne zaman sürekli, hangi durumda süreksiz olur?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	**Kazanım**	**Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği**
Limit	Bir fonksiyonun belirli bir noktada limitini belirleyebilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, örnek soru çözerek
Sağdan Limit	Bir fonksiyonun belirli bir noktada sağ limitini belirleyebilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, tekrar yaparak
Soldan Limit	Bir fonksiyonun belirli bir noktada sol limitini belirleyebilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, tekrar yaparak
Sonsuzda Limit	Bir fonksiyonun sonsuzda limitini belirleyebilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, örnek soru çözerek
Süreklilik	Bir fonksiyonun belirli bir noktada sürekli olup olmadığını belirleyebilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, örnek soru çözerek

Anahtar Kavramlar

- Limit
- Sağ Limit
- Sol Limit
- Sonsuzda Limit
- Süreklilik

Giriş

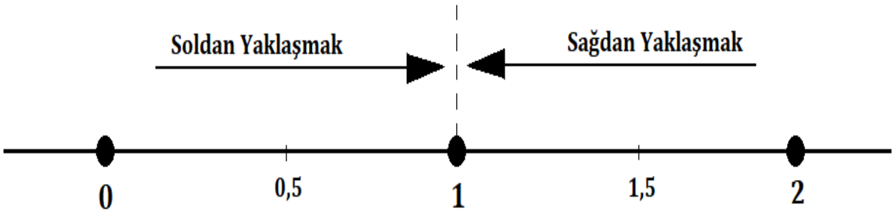
Bir fonksiyonun belirli bir noktadaki limiti, o noktaya gittikçe daha yakın değerler verildiğinde fonksiyonun değerinin bir sabit sayıya yaklaşması durumu olarak ifade edilebilir. Fonksiyonun değerini sabitlendiği sayı ise limit değeri olarak adlandırılır. Buradan hareketle $y = f(x)$ şeklinde verilen bir fonksiyonun bir c noktasındaki limiti için aşağıdaki tanım verilebilir.

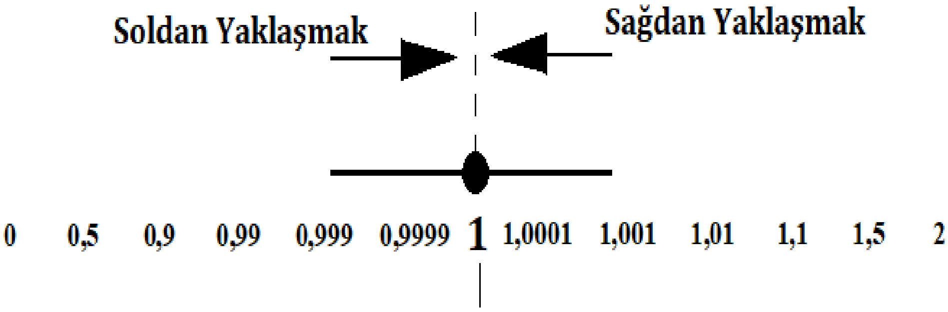
10.1 Limit Tanımı

Tanım 1: $c \in R$ ve $L \in R$ olmak üzere, eğer x değeri c sabit sayısına yaklaşırken $f(x)$ değeri de L sabit sayısına yaklaşıyorsa "$f(x)$ fonksiyonunun $x = c$ noktasındaki limiti L'dir." denir ve aşağıdaki biçimde ifade edilir.

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

x değerinin c sayısına yaklaşmasına bir örnek verilecek olur ise;
Örneğin x'in $c = 1$'e yaklaşması iki şekilde olabilir. Birincisi 1 sayısına sağdan yaklaşmak (1'den büyük değerlerin olduğu taraftan yaklaşmak), ikincisi ise 1 sayısına sol taraftan yaklaşmak (1'den küçük değerlerin olduğu taraftan yaklaşmak) demektir.





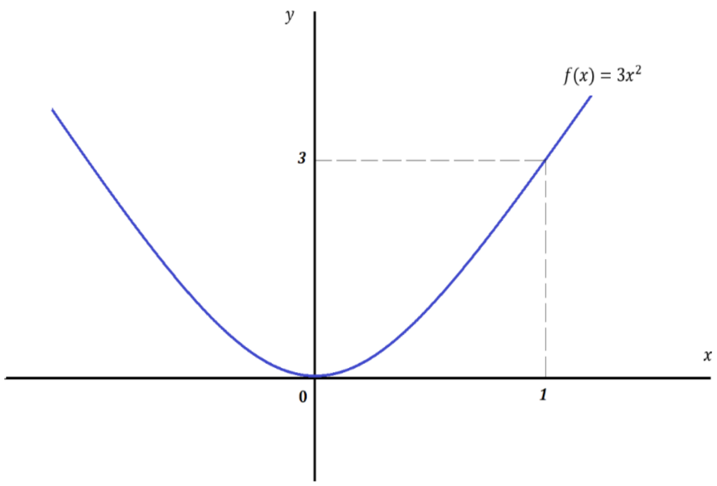
Soldan yaklaşıldığında;

x	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99	0,999	0,9999	0,99999

Sağdan yaklaşıldığında;

x	1,00001	1,0001	1,001	1,01	1,05	1,1	1,2	1,3

Örnek:



Şekil 10.1: Bir Fonksiyonun Limiti

$x = 1$'e soldan yaklaşıldığında, x ve $f(x)$ değerleri;

x	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99	0,999	0,9999
$f(x)$	1,47	1,92	2,43	2,7075	2,9403	2,994003	2,9994

$x = 1$'e sağdan yaklaşıldığında, x ve $f(x)$ değerleri;

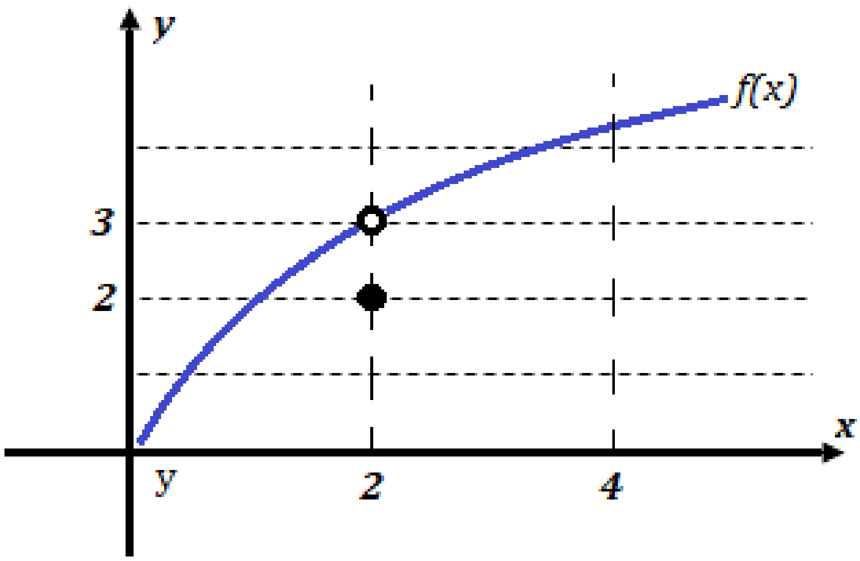
x	1,0001	1,001	1,01	1,05	1,1	1,2	1,3
$f(x)$	3,0006	3,006003	3,0603	3,3075	3,63	4,32	5,07

Yukarıda verilen örnekte, $f(x) = 3x^2$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasına yaklaştıkça aldığı değerler hem grafik hem de tablo hâlinde yer almaktadır. Grafikten ve tablodan görülebileceği üzere $f(x)$ fonksiyonunun değeri, x değişkeninin değeri 1'e yaklaştıkça, 3 sayısına yaklaşmaktadır. Diğer bir ifade ile $f(x)$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki limit değeri 3'tür.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} 3x^2 = 3$$

Bir fonksiyonun bir noktada limitini var olması için o noktada tanımlı olması gerekmez. Diğer bir ifade ile limit değeri, fonksiyonun aldığı bir değer olmak zorunda değildir, sadece fonksiyonun yaklaştığı bir değerdir.

Örneğin aşağıda grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = 2$'ye yaklaşırken limiti 3 olmasına karşın, $x = 2$ noktasında fonksiyonun aldığı değer 2 dir [$f(2) = 2$]. Dikkat edilirse fonksiyonun almış olduğu değer ile limit değeri birbirinden farklıdır.Fonksiyonun grafiği incelenirse tam x=2 de grafiğin üzerinde bulunduğu nokta açık olarak belirtilmiştir.



Yukarıda limit ile ilgili verilen sezgisel tanım, matematiksel ifadelerle Tanım 2'de verildiği gibi ifade edilebilir.

Tanım: $f(x)$, c noktasını içeren bir açık aralıkta tanımlı olan (c noktasında tanımlı olmak zorunda değil) bir fonksiyon olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ reel sayısına karşılık aşağıdaki koşula

uygun bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa, $f(x)$ fonksiyonunun $x = c$ noktasındaki limit değeri L'dir.
Her $x \in (c-\delta, c+\delta)$ için;

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

Yukarıda verilen matematiksel tanıma göre; bir $f(x)$ fonksiyonunun $x = c$ noktasındaki limit değeri L ise, x yerine c sayısına yakın (en fazla δ uzaklıkta) değerler yazılarak $f(x)$ fonksiyonunun değeri L sayısına istenildiği kadar (ε kadar) yakınlaştırılabilir.

Örnek:

$f(x) = 5x$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki limitinin 5 olduğunu limit tanımından yararlanarak gösteriniz.

Çözüm: $\underset{x\to 1}{Lim}\, 5x$ = 5 olsun. Bu durumda sırasıyla,

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$
$$|5x - 5| < \varepsilon$$
$$5|x - 1| < \varepsilon$$
$$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{5}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Burada eğer $\delta = \varepsilon/5$ olarak seçilirse, ispat tamamlanmış olur. Diğer bir ifade ile, eğer $f(x) = 5x$ fonksiyonunun değerinin 5 sayısından farkının örneğin 0.1 den daha az ($|f(x) - 5| < 0.1$) olmasını istiyorsanız, x e vereceğiniz değer 1 sayısına 0.1/5 sayısından uzak (yani $x \in (1 - 0.1/5;\ 1 + 0.1/5)$ olmalıdır) olmamalıdır.
Yukarıda verilen örnekte limiti aranan noktada fonksiyon tanımsız değildi. Ayrıca fonksiyon, limiti aranan noktanın sağında ve solunda farklı karakter göstermiyordu. Bu tip durumlarda, limit hesaplanacak olan nokta doğrudan fonksiyonda yerine yazılarak da limit bulunabilir.

$$\lim_{x\to 1} 5x = 5 \cdot 1 = 5$$

Not: Bir fonksiyonun bir noktada limitinin var olması demek, o nokta için hesaplanan limit değerinin bir reel sayı olarak bulunması demektir.

Örnek:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x - 1}$$

Fonksiyonunun $x = 1$ noktasına yaklaşırken limitini inceleyiniz.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x - 1}{x - 1} = \ ?$$

Nümerik Çözüm:

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$		$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
0.9	2.82		1.1	3.2
0.9998	2.9996		1.003	3.006
0.999994	2.999988		1.0001	3.0002
0.9999999	2.9999998		1.000007	3.000014
↓	↓		↓	↓

1^-	3^-		1^+	3^+

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-x-1}{x-1} = 3 \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-x-1}{x-1} = 3$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x-1}{x-1} = 3$$

10.2 Limit Kuralları

$\lim_{x\to a} f(x) = L_1$, $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$, $k \in R$ ve $P(x)$ bir polinom olmak üzere limit alma kuralları aşağıdaki maddeler hâlinde özetlenebilir.

1. İki fonksiyonun toplamlarının (farklarının) limiti, fonksiyonların limitlerinin farkına eşittir.
$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = L_1 + L_2$$
2. İki fonksiyonun çarpımlarının limiti, fonksiyonların limitlerinin çarpımına eşittir.
$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]\cdot\left[\lim_{x\to a} g(x)\right] = L_1.L_2$$
3. İki fonksiyonun bölümlerinin limiti, fonksiyonların limitlerinin bölümüne eşittir. Burada önemli olan, paydanın sıfır olmamasıdır. Sıfır olması durumunda tanımsızlık oluşur.
$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad (L_2 \neq 0)$$
4. $\lim_{x\to a} k\cdot f(x) = k\cdot \lim_{x\to a} f(x) = k\cdot L_1$
5. $\lim_{x\to a} k = k$
6. $\lim_{x\to a} x = a$
7. $\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$

Örnek:

Aşağıda hesaplanan limitleri inceleyiniz.

$$\lim_{x\to 2} 2x^3 + x + 3 = 2\cdot 2^3 + 2 + 3 = 21$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+2x}{x-1} = \frac{(-1)^2+2(-1)}{-1-1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to \pi/6} \sin 2x = \sin 2(\pi/6) = \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x}{x-1} = \frac{1^2+2\cdot 1}{1-1} = \frac{3}{0} \to \infty$$

İlgili fonksiyonun $x = 1$ noktasında limiti yoktur.

10.3 Sağdan ve Soldan Limitler

Bir fonksiyonun örneğin $x = 1$ noktasındaki limitinden bahsedilirken, ilgili fonksiyonun $x = 1$ noktasına yaklaşırken aldığı değerler dikkate alınır. Burada $x = 1$ noktasına hem sağdan hem soldan yaklaşılması söz konusudur.

Bu arada $x = 1$ noktasına sağdan ve soldan yaklaşırken fonksiyonun aldığı değerler farklı değerlere yaklaşabilir. Burada 1'e sağdan ve soldan yaklaşmak ifadelerini açıklamak gerekirse, $x = 1$'e soldan yaklaşmak, 1'in sol tarafından, yani sıfırdan 1'e doğru yaklaşmak, yani x'e 0,9999 gibi bir değer vermektir. $x = 1$'e sağdan yaklaşmak, 1'in sağ tarafından, yani 2'den 1'e doğru yaklaşmak, yani x'e 1,001 gibi bir değer vermektir. Buradan hareketle fonksiyonun limiti aranan noktaya yaklaşım doğrultusuna göre Sağdan Limit ve Soldan Limit kavramları tanımlanır.

10.3.1 Sağdan Limit

Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x = c$ noktasına sağdan (c den büyük değerlerle) yaklaşırken, yakınsadığı değerdir ve aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\lim_{x \to c^+} f(x)$$

10.3.2 Soldan Limit

Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x = c$ noktasına soldan (c den küçük değerlerle) yaklaşırken, yakınsadığı değerdir ve sağdan limite benzer şekilde aşağıdaki şekilde ifade edilir.

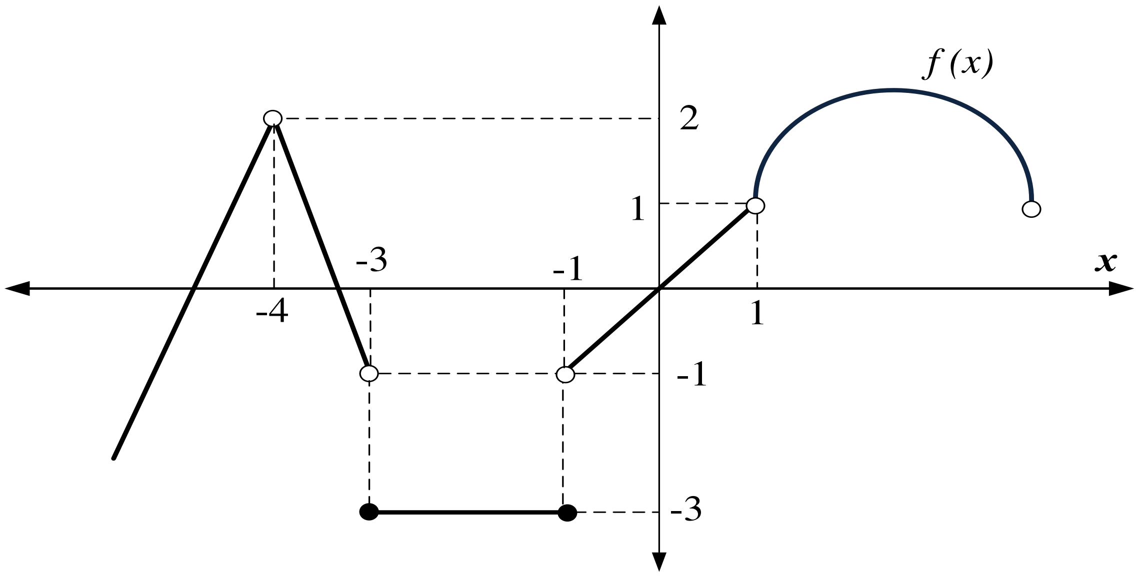
$$\lim_{x \to c^-} f(x)$$

Yukarıda tanımlanmış olan soldan ve sağdan limit kavramlarından yararlanarak bir fonksiyonun bir noktadaki limitinin varlığına ilişkin aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 1: Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x = c$ noktasındaki limit değeri L'dir, ancak ve ancak $x = c$ noktasındaki sağdan ve soldan limitler de L ye eşit ise:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

Uyarı: Bir fonksiyonun tanımsız olduğu bir noktadaki limit soruluyorsa, soldan ve sağdan limitler incelenerek o noktada limit olup olmadığına karar verilir.



Şekil 10.2: Grafik Üzerinde Limit Belirleme

Örnek:

Grafiği yukarıda verilen $f(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki limitleri belirleyiniz.

a) $\lim_{x \to -4} f(x)$

b) $\lim_{x \to -1} f(x)$

c) $\lim_{x \to +1} f(x)$

Çözüm:

Yukarıda istenen limitlerin hepsi Teorem 1 uyarınca soldan ve sağdan limitler yardımı ile hesaplanmıştır.

a) $\lim\limits_{x\to-4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-4^+} f(x) = 2$

olduğu için $\lim\limits_{x\to-4} f(x) = 2$ dir.

b) $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -3 \neq \lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -1$

olduğu için $\lim\limits_{x\to-4} f(x)$limiti yoktur.

c) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 1$

olduğu için $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 1$ olur.

Uyarı: Fonksiyonun işaret veya karakter değiştirdiği noktalarda limit hesaplanırken soldan ve sağdan limitleri ayrı ayrı inceleyerek Teorem 1'e göre limitin varlığını araştırınız.

Uyarı: İki fonksiyonun oranı şeklinde verilen fonksiyonların limiti alınırken belirsizlik durumu ile karşılaşılması durumunda, pay ve paydadaki fonksiyonlara uygun matematiksel işlemler yapılarak belirsizlik giderilmeye çalışılır. Pay ve paydanın ayrı ayı türevlerinin alınmasına dayanan L'Hospital kuralı da bu tip durumlarda kullanılabilecek bir alternatif yöntemdir. Burada dikkat edilmesi gereken husus, tanımsız ve belirsiz kavramlarının karıştırılmaması gerektiğidir.

$\frac{0}{sayı}$ ifadesi 0'a eşittir.

$\frac{sayı}{0}$ ifadesi sonsuza (∞) eşittir, yani <u>tanımsız</u>dır. Bu durumda "limit sonsuza gider" yada "limit yoktur" ifadeleri kullanılabilir.

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 1^\infty$ gibi ifadeler ise <u>belirsiz</u>dir. Yukarıdaki uyarı, bu tip durumlar için geçerlidir.

Örnek:

Aşağıdaki limitleri inceleyiniz.

a) $$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+x-2} = \frac{1-1}{1^2+1-2} = \frac{0}{0} \quad \text{Belirsiz}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x\to1}\frac{1}{x+2} = \frac{1}{3}$$

b) $$\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \frac{4-4}{\sqrt{4}-2} = \frac{0}{0} \quad \text{Belirsiz}$$

$$\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}$$

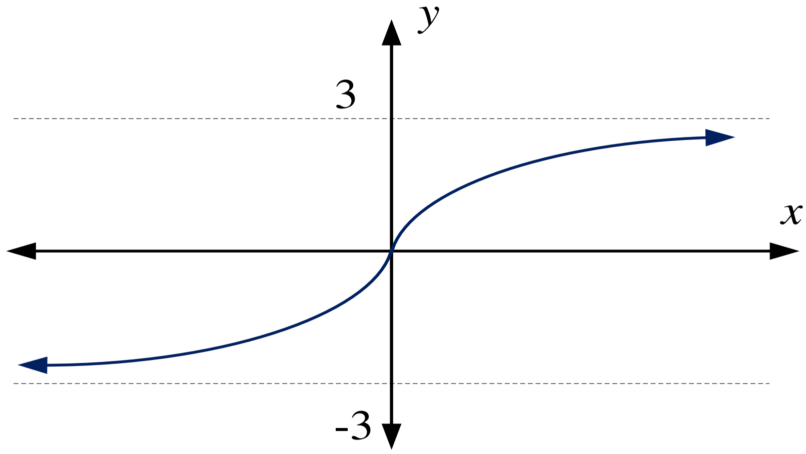
$$= \lim_{x\to4}\frac{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}{x-4}$$

$$= \lim_{x\to4}\left(\sqrt{x}+2\right) = 4$$

10.3.3 Sonsuzda Limit

Bu kısma kadar bir fonksiyonun belirli bir noktadaki ($x \to c$) limitinden bahsedilmiştir. Bu kısımda ise bir fonksiyon limitinin, x sonsuza yaklaşırken ($x \to \infty$) nasıl hesaplanacağı üzerinde durulacaktır.

Not: Sonsuzda limitler daha sonra türev konusu kapsamında öğrenilecek olan grafik çözümünde önemli rol oynamaktadır. Şöyle ki, artı ve eksi sonsuzda fonksiyonun limiti, grafiği çizilen fonksiyonun uçlarının ne tarafa doğru çizileceği bilgisini vermektedir.



Şekil 10.3: Örnek Fonksiyon

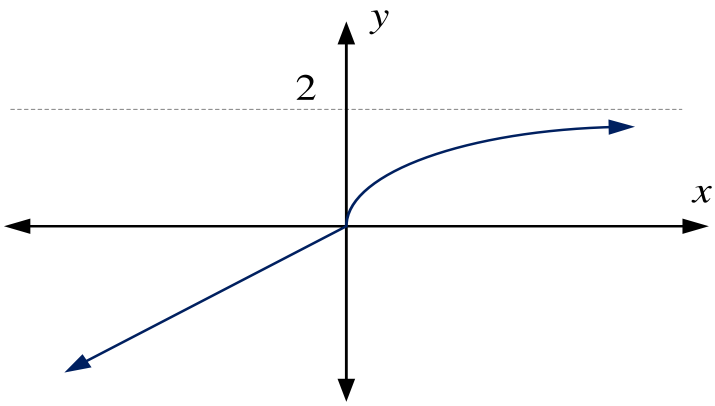
Örnek:

Yukarıda grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki limitleri inceleyiniz.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +3$$

Örnek: Yukarıda grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki limitleri inceleyiniz.



Şekil 10.4: Parçalı Fonksiyon Örneği

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

Örnek:

Aşağıdaki sonsuzda limitleri inceleyiniz.

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x-5} = \sqrt{\infty-5} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} x^2 - x = \lim_{x\to\infty} x(x-1) = \infty(\infty-1) = \infty \cdot \infty = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 - x = \lim_{x\to\infty} x(x-1) = -\infty(-\infty-1) = -\infty \cdot (-\infty) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+x+1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2} = -\infty(-\infty-1) = -\infty\cdot(-\infty) = \infty$$

Yukarıda örnek kapsamında verilen çözümler incelendiğinde ilk üç seçenekteki sorularda (her ne kadar matematiksel olarak çok doğru bir ifade olmasa da) bilinmeyen yerine sonsuz yazılarak limit değeri bulunabilmiştir. Ancak son seçenekte bilinmeyen yerine doğrudan sonsuz (∞) yazıldığı durumda, pay ve payda ayrı ayrı sonsuza gitmekte ve dolayısıyla limit değeri (∞/∞) belirsiz sonucunu vermektedir. Bu nedenle ilgili limit hesaplanırken, belirsizliği ortadan kaldıracak matematiksel işlemler yapıldıktan sonra bilinmeyen yerine ∞ yazılmıştır. Burada rasyonel fonksiyonlarda yapılan limit işlemini genelleştirecek şekilde iki polinomun oranının sonsuzda limitine ilişkin aşağıdaki Teorem 2 ile verilen kural uygulanabilir.

10.3.4 Rasyonel Fonksiyonlar için Sonsuzda Limit

$P(x)$ ve $Q(x)$, aşağıda verildiği gibi sırasıyla n ve m'inci dereceden polinomları olsun.

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$
$$Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$$

Bu durumda;

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 & n < m \text{ ise} \\ \dfrac{a_n}{b_n} & n = m \text{ ise} \\ \infty & n > m \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde hesaplanır.

Örnek:

Aşağıdaki limitlerin hesaplanışını inceleyiniz.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+7x+9}{5x^2-2} = \frac{3}{5}$$

Verilen rasyonel fonksiyonda pay ve paydada yer alan polinom fonksiyonların her ikisinin de derecesi 2'dir.

Dikkat: Eğer x örneğin sonsuza değil de 1'e yaklaşmakta ise limit değeri aşağıdaki olur.

$$\lim_{x\to1} \frac{3x^2+7x+9}{5x^2-2} = \frac{3\cdot1^2+7\cdot1+9}{5\cdot1^2-2} = \frac{19}{3}$$

Örnek:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5-2x^3+9x-4}{4x^2+2x} = \infty$$

Çözüm:

Pay kısmında yer alan polinomun derecesi, paydada yer alan polinomun derecesinden büyük.

$$\lim_{x\to0} \frac{x^5-2x^3+9x-4}{4x^2+2x+1} = \frac{0^5-2\cdot0^3+9\cdot0-4}{4\cdot0^2+2\cdot0+1} = \frac{-4}{1} = -4$$

Örnek:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-3}{x^2+2} = 0$$

Pay kısmında yer alan polinomun derecesi, paydada yer alan polinomun derecesinden küçük.

Dikkat:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x-3}{x^2+2}=\frac{2(-1)-3}{(-1)^2+2}=-\frac{5}{3}$$

Uyarı: Yukarıdaki örneklerde ve Teorem 2'de sadece ∞ için limitler incelenmiştir. Eğer $-\infty$ için limit alınıyorsa, işaretin dikkate alınması gerektiğini unutmayınız.

Örnek:

Aşağıdaki limitlerin hesaplanışını inceleyiniz.

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^3-x+1}{2x^2-2}=-\infty$$

Payın derecesi paydanın derecesinden büyüktür. Ayrıca paydanın derecesi tek, payın derecesin çift olduğundan, paydadan (-) paydan ise (+) işaret gelir. İkisinin oranı ise (-) olur.

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{5x^6-x+1}{3x^4-2x^2}=+\infty$$

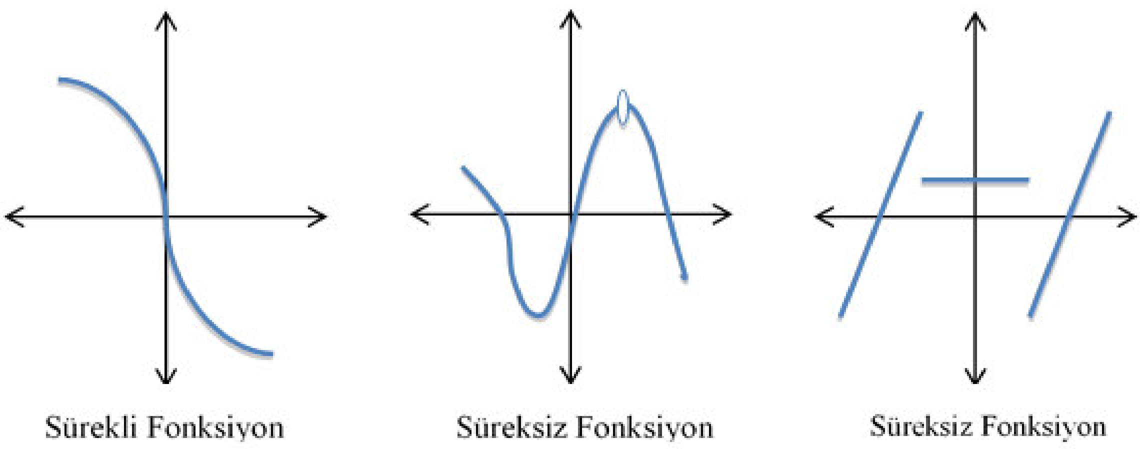
Payın derecesi paydanın derecesinden büyük. Ayrıca pay ve paydanı derecesi çift sayı olduğu için her ikisinden de (+) işareti elde edilir ve dolayısıyla sonuç da (+) olur.

10.4 Süreklilik

Bu kısımda bir fonksiyonun bir noktadaki ve aralıktaki sürekliliği ele alınmıştır. Basit anlamda sürekli bir fonksiyon, koordinat sisteminin bir ucundan diğer ucuna hiç kalemi kaldırmadan grafiği çizilebilen grafiklerdir. Dolayısıyla, bir fonksiyonun grafiğini çizmek için kalemi kaldırmak gerekiyorsa, bu sürekli olmayan (süreksiz) bir fonksiyondur. Elin kaldırılmasının gerektiği noktalar ise ilgili fonksiyonun süreksizlik noktalarıdır.

Örnek:

Aşağıdaki grafiği verilen 3 fonksiyonu inceleyiniz.



Şekil 10.4: Süreklilik Gösterimi

Yukarıdaki ilk fonksiyon, grafiğinden anlaşılacağı üzere hiç kalemi kaldırmadan tek seferde çizilebilecek bir fonksiyon olduğu için sürekli bir fonksiyondur. Diğer iki fonksiyon ise tek seferde, kalemi kaldırmadan grafiklerinin çizilmesi mümkün olmayan fonksiyonlar oldukları için süreksizdirler.

Sürekliliğin Tanımı:

Aşağıdaki koşulların gerçekleyen bir $f(x)$ fonksiyonu, $x=c$ noktasında süreklidir denir.

Koşul 1: $f(x)$ fonksiyonu $x = c$ noktasında tanımlı olmalı

$$f(c) \in R$$

Koşul 2: $f(x)$ fonksiyonu $x = c$ noktasındaki sağdan ve soldan limitleri var ve fonksiyonun $x = c$ noktasındaki değerine eşit olmalı.

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$$

Örnek:

Aşağıda verilen $f(x)$ fonksiyonların istenilen noktalarda ki sürekliliğini inceleyiniz.

a) $f(x) = x^2 + 5x + 5$ $\quad x = -2$ noktasında

b) $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad x = 0$ noktasında

c) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & ; x < 3 \\ -x + 12 & ; x > 3 \end{cases}$ $\quad x = 3$ noktasında

d) $f(x) = \begin{cases} 1 & ; x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 + x & x > 0 \end{cases}$ $\quad x = 0$ noktasında

Çözüm:

Aşağıda verilen çözümlerde, koşullardan herhangi birisinin sağlanmadığı görüldüğünde, diğer koşula bakılmaksızın süreksizlik kararı verildiğine dikkat ediniz.

a) $f(x) = x^2 + 5x + 5$ bir polinom fonksiyondur ve polinomlar her x değeri için süreklidir. Dolayısıyla $f(x) = x^2 + 5x + 5$ fonksiyonu $x = -2$ noktasında da süreklidir.

b) $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu sürekliliği incelenen $x = 0$ noktasında tanımsızdır.

$$f(0) = \frac{1}{0} = \infty$$

Bu nedenle

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

fonksiyonu $x = 0$ noktasında süreksizdir.

c) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & ; x < 3 \\ -x + 12 & ; x > 3 \end{cases}$ fonksiyonu dikkat edilirse, 3'ten küçük ve 2'den büyük değerler için tanımlı ancak 3 için tanımlı değildir. Dolayısıyla $x = 3$ noktasında süreksizdir.

d) $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & ;\ x < 0 \\ (2x - 1)^2 & ;\ x = 0 \\ 1 + x & ;\ x > 0 \end{cases}$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında tanımlıdır.

$$f(0) = (2 \cdot 0 - 1)^2 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (1 - 2x) = 1 - 2 \cdot 0 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (1 + x) = 1 + 0 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 1$$

Dolayısıyla ilgili fonksiyon $x = 0$ noktasında süreklidir.

Uyarı: Bir f fonksiyonun süreksiz olduğu noktalar kümesi, süreksizlik noktaları kümesi olarak adlandırılır ve Srz (f) ile gösterilir. Bir fonksiyonun süreksizlik noktaları kümesi sorulduğunda, fonksiyonun tanımsız yapan noktalar ve fonksiyonun karakter değiştirdiği noktalar ayrı ayrı süreklilik açısından incelenmelidir.

Örnek:
Aşağıda verilen $f(x)$ fonksiyonu için süreksizlik noktaları kümesini bulunuz.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+3}{x-5} & ; x < 1 \\ \dfrac{x^2-5x+3}{x-2} & ; x \geq 1 \end{cases}$$

Çözüm:
Süreksizlik noktalarının bulunması için öncelikle süreksizliğe aday olan noktaların belirlenmesi gerekir. Bu noktalar fonksiyonun karakter değiştirdiği noktalardır. Ayrıca fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda da süreksizlik vardır.

10.4.1 Fonksiyonu Tanımsız Yapan Noktalar

Yukarıda ki iki parçadan oluşan fonksiyonların her birisi için paydayı 0 yapan değerlerde tanımsızlık olabilir.

$$\frac{x+3}{x-5}$$

için $x - 5 \neq 0 \implies x \neq 5$ olmalıdır.
Ancak fonksiyon $x < 1$ için geçerli olduğundan, $x = 5$ noktasında bir tanımsızlık yoktur.

$$\frac{x^2-5x+3}{x-2}$$

için

$$x - 2 \neq 0 \implies x \neq 2$$

olmalıdır.
Bu fonksiyon $x \geq 1$ için geçerli olduğundan, $x = 2$ noktasında fonksiyon tanımsızdır.
Dolayı ile <u>fonksiyon $x = 2$ noktasında süreksizdir</u>.

10.4.2 Fonksiyonun Karakter Değiştirdiği Noktalar

Dikkat edilecek olursa yukarıdaki fonksiyon $x = 1$ noktasında farklılaşmaktadır.
Dolayısıyla bu nokta, Teorem 3 uyarınca süreksizlik açısından incelenmelidir.

$$f(1) = \frac{1^2 - 5 \cdot 1 + 3}{1-2} = \frac{-1}{-1} = 1 \in R$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(\frac{x+3}{x-5} \right) = \frac{1+3}{1-5} = \frac{4}{-4} = -1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \left(\frac{x^2-5x+3}{x-2} \right) = \frac{1^2 - 5 \cdot 1 + 3}{1-2} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -1 \neq \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 1$$

Yukarıda gösterildiği gibi soldan ve sağdan limitler eşit olmadığı için fonksiyon

$$x = 1$$

noktasında süreksizdir.
Dolayısıyla süreksizlik noktaları kümesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\text{Srz}\,(f) = \{1, 2\}$$

Örnek:

$$f(x)=\begin{cases}2x+a & ; \quad x<-1\\ \\ x+3a & ; \quad x>-1\end{cases}$$

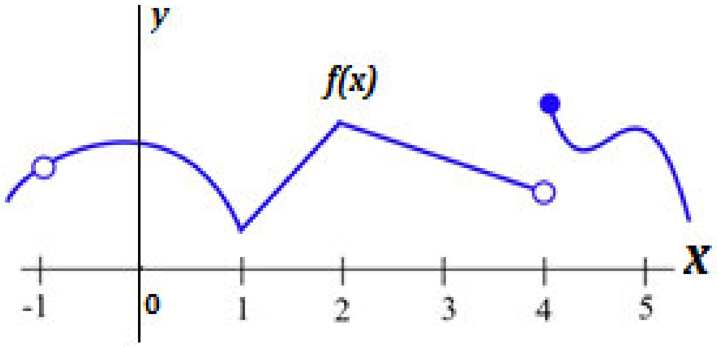
Parçalı fonksiyonu veriliyor. Buna göre, $x=-1$ noktasında limiti var olduğuna göre $\boldsymbol{a}$ kaçtır?

a) -1 b) $-1/2$ c) $1/2$ d) 1 e) 2

Cevap: b

Örnek:

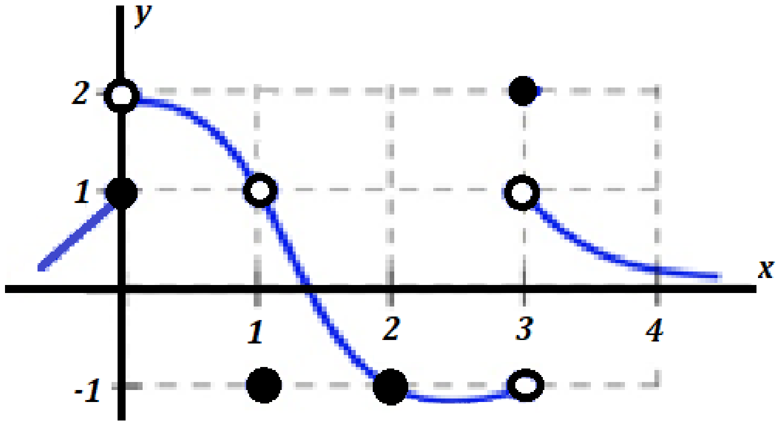
Aşağıdaki fonksiyonun x, tamsayı değerlerindeki süreksizlik noktalarını belirleyiniz.



Cevap: -1 ve 4

Örnek:

Aşağıdaki fonksiyonun x, tamsayı değerlerindeki sürekli olduğu noktaları belirleyiniz.



Cevap: 2 ve 4

Uygulama Soruları

1) Aşağıda istenen limitleri hesaplayınız.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x^2+x-2}$

c) $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x-5}$

Çözüm:

Aşağıdaki limit hesaplarının soldan ve sağdan limitler olarak ayrı ayrı incelendiğine dikkat ediniz.

a)

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=\lim_{x\to 0^-}-1=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0^-}1=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1\neq\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=1$$

olduğu için

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

limiti yoktur.

b)

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|}{x^2+x-2}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{-1}{(x+2)}=-\frac{1}{3}$$

$$\mathit{lim}_{x\to 1^+}\frac{|x-1|}{x^2+x-2}$$

$$=\mathit{lim}_{x\to 1^+}\frac{(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$=\mathit{lim}_{x\to 1^-}\frac{1}{(x+2)}=\frac{1}{3}$$

$$\mathit{lim}_{x\to 1^-}\frac{|x-1|}{x^2+x-2}=-\frac{1}{3}$$

olmasına karşın,

$$\mathit{lim}_{x\to 1^+}\frac{|x-1|}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}$$

olduğu için

$$\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x^2+x-2}\neq\mathit{lim}_{x\to 1^-}\frac{|x-1|}{x^2+x-2}=-\frac{1}{3}$$

dolayısıyla fonksiyonun limiti yoktur.

c) Son şıkta x, 5'e soldan yalaşırken $(x\to 5^-)$, $x-5<0$ olacağı için;

$$\lim_{x\to 5^-}\sqrt{x-5}$$

soldan limiti yoktur. Dolayısıyla sağdan limit hesaplama gerek kalmadan,

$$\lim_{x\to 5}\sqrt{x-5}$$

limitinin var olmadığı söylenebilir.

2) Aşağıdaki fonksiyonun süreksizlik noktalarını belirleyiniz.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x+4}{2x-1} & ; \quad x>1\\ 6 & ; \quad x=1\\ \frac{3x+2}{3x-2} & ; \quad x<1\end{cases}$$

$$2x-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}$$

olup, $\frac{1}{2}$, $1'$den büyük olmadığından bu noktada bir problem yoktur.

$$3x-2=0 \rightarrow x=\frac{2}{3} \quad \text{olup,} \quad \frac{2}{3}<1$$

olduğundan fonksiyon

$$x=\frac{2}{3}$$

noktasında süreksizdir.

Son olarak kritik nokta olan $x = 1$ noktasını inceleyelim.

$f(1)=4$'tür. $x>1$ iken;

$$\frac{1+4}{2-1}=\frac{5}{1}=5$$

olduğundan sol limit ne çıkarsa çıksın f fonksiyonu, $x = 1$'de süreksizdir.

Yani süreksizlik noktaları 2/3 ve 1'dir.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde limit kavramı ayrıntılı olarak anlatılmıştır. Sağ limit, sol limit ve sonsuzda limit kavramları tanımlanmış, ardından bir fonksiyonun sürekliliği işlenmiştir. Konu örnek sorularla desteklenmiştir.

Bölüm Soruları

1) $\lim_{x\to -4} \sqrt{1-2x} = ?$

a) -3 b) -2 c) 2 d) 3 e) Limiti Yok

2) Aşağıdaki işlemin sonu kaçtır?

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{x-3} = ?$$

a) Limit Yok b) -3 c) 2 d) 3 e) ∞

3) Aşağıdaki işlemin sonu kaçtır?

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-x+4}{x^2+2} = ?$$

a) -1 b) 2 c) 4 d) 8 e) Limit yok

4) Aşağıdaki işlemin sonu kaçtır?

$$\lim_{x\to \infty} \frac{2-3x-4x^4}{2x^4+2} = ?$$

a) Limit Yok b) 8 c) 4 d) – 2 e) 2

5) Aşağıdaki işlemin sonu kaçtır?

$$\lim_{\to \infty} \frac{\sqrt{x^2+4x+3}}{\sqrt{4x^2+5}} = ?$$

a) 1/2 b) -1 c) 1 d) 2 e) $-1/2$

6) $f(x) = \begin{cases} 3-2x & ; \quad x<1 \\ 5 & ; \quad x=1 \\ x^2-x & ; \quad x>1 \end{cases}$ ise $\lim_{x\to 1} f(x) = ?$

a) 1/2
b) 1
c) 2
d) -1
e) Limit Yok

7) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{3x} & ; \quad x \neq 0 \\ k & ; \quad x=0 \end{cases}$ ise fonksiyonun R'de sürekli olması için k ne olmalıdır?

a) 0
b) 1
c) 2
d) 1/3
e) $-1/3$

8) $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & ; \quad x \geq 2 \\ 2x+a & ; \quad x<2 \end{cases}$ ise fonksiyonun R'de sürekli olması için a ne olmalıdır?

a) -2
b) -1
c) 0
d) 1
e) 2

9) Aşağıdaki problemin cevabını bulunuz.

$$f(x) = \begin{cases} 3-2x & ; \quad x<1 \\ 5 & ; \quad x=1 \\ x^2-x & ; \quad x>1 \end{cases} \quad \text{ise} \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = ?$$

a) $1/2$
b) 5
c) 1
d) -1
e) $-1/2$

10) Aşağıdaki problemin cevabını bulunuz.

$$f(x) = \begin{cases} 3-2x & ; \quad x<1 \\ 5 & ; \quad x=1 \\ x^2-x & ; \quad x>1 \end{cases} \quad \text{ise} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = ?$$

a) 2
b) 1
c) $1/2$
d) -1
e) 0

Cevaplar

1) d, 2) c, 3) b, 4) d, 5) a, 6) e, 7) e, 8) d, 9) c, 10) e

11. TÜREV TANIMI VE TÜREV KURALLARI

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

11.1. Türev tanımı
11.2. Türev Kuralları
11.3. Birinci Türev
11.4. Yüksek Mertebeden Türevler
11.5. Artan Azalan Fonksiyon
11.6. Fonksiyonlarda Konkavite

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1) Türevi tanımlayınız? Türev neyin göstergesidir?

2) Artan ve Azalan Fonksiyon hangi durumda gerçekleşir?

3) Bir fonksiyon hangi durumda tümsek, hangi durumda çukur olur?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	Kazanım	Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği
Türev Tanımı	Bir fonksiyonun türevini alabilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, tekrar yaparak
Azalan ve Artan Fonksiyon	Bir fonksiyonun türevini alabilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, tekrar yaparak, örnek soru çözerek
Konkavite, Bükeylik	Bir fonksiyonun ikinci türevini alabilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, tekrar yaparak, örnek soru çözerek

Anahtar Kavramlar

- Türev
- Değişim Oranı
- Marjinal Kavramı

Giriş

Türev, işletmeciler için çok önemli kavramlardan biridir. İki değişken arasındaki ilişki verilmişse biri artarken diğerinin artıp azaldığını, bağımlı değişkenin (y) bağımsız değişkene (x) göre türevini alarak bulabiliriz. Somut bir örnek vermek istersek, talep ile gelir arasındaki ilişkiyi verebiliriz. Talebin belli bir düzeye kadar artması, toplam geliri de arttırabilir; belli bir düzeyden sonra da talep artışı toplam gelirde azalma meydana getirebilir. Toplam gelirle talep arasındaki ilişkiyi, yani toplam gelirin talep cinsinden fonksiyonunu biliyorsak, gelirin talebe göre türevini alıp bu türevin işaretini inceleyerek, talebin hangi değerleri için gelirin arttığını, hangi değerde en yüksek seviyeye ulaştığını, hangi değerlerde azaldığını bulabiliriz. Bütün bunları bulabilmek için fonksiyonların türevini tanımlamak, herhangi bir fonksiyonun türevini alabilmek ve fonksiyonun türevi ile kendisi arasındaki ilişkileri incelemek gerekir.

Bu bölümde bir fonksiyonun birinci türevi matematiksel ve geometrik olarak tanımlanacak ve birinci türevin çeşitli yorumları yapılacaktır.

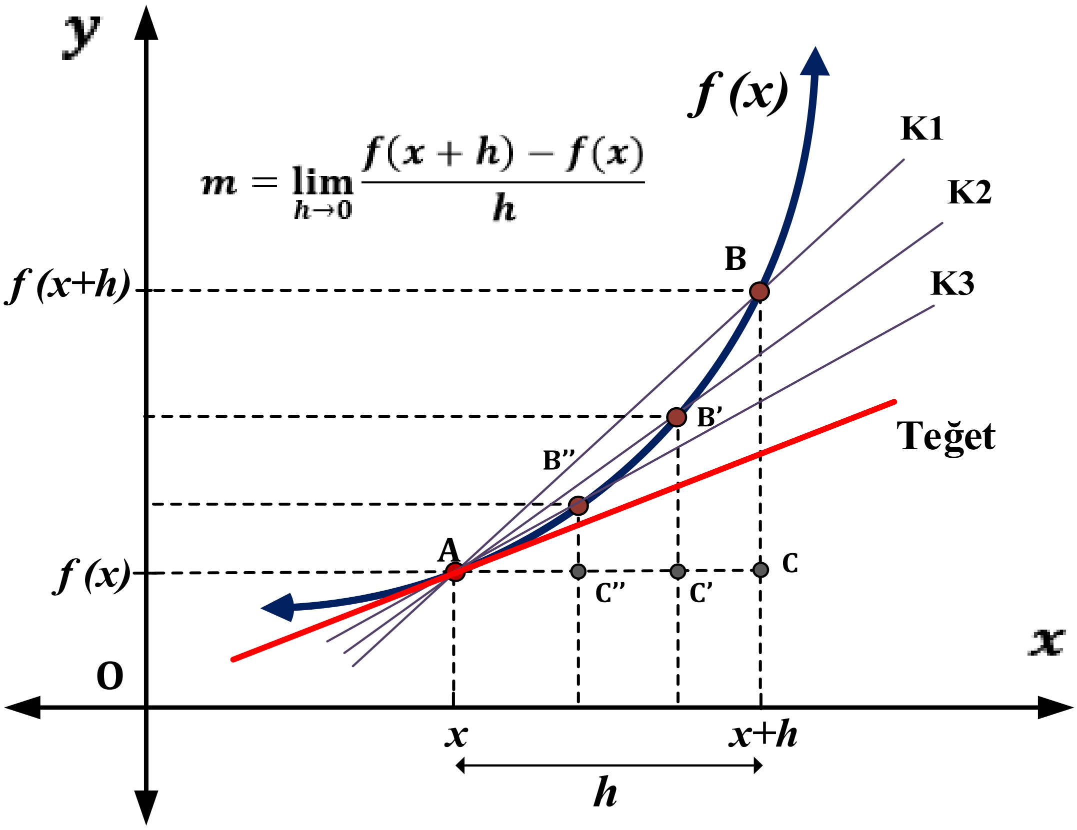
11.1 Türevin Matematiksel ve Geometrik Yorumu

Bir fonksiyonun bir noktadaki birinci türevi, fonksiyonun o noktadaki eğimidir. Bu da o noktada fonksiyona çizilecek teğet doğrunun eğimi ile belirtilir.

Doğrusal fonksiyonlar için eğim sabittir. Yani x değişirken y'nin değişim oranı sabittir. Fakat eğrisel fonksiyonlar için eğim her noktada sabit değildir ve her nokta için ayrıca hesaplanmalıdır.

Şekil 11.1 incelendiğinde görülür ki $A[x, f(x)]$ ve $B[x+h, f(x+h)]$, $y = f(x)$ fonksiyonunun eğrisi üzerinde iki nokta ise bu iki noktadan geçen doğrunun (kiriş, kesen) eğimi;

$$m_{AB} = \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x} \quad \rightarrow \quad m_{AB} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



Şekil 11.1: Türevin Geometrik Yorumu

$A[x, f(x)]$ noktasını sabit tutarak $B[x+h, f(x+h)]$ noktasını A noktasına yaklaştırırsak bir diğer ifade ile $x+h$ değerini küçülterek x değerine yaklaştırmaya çalışırsak, $h \rightarrow 0$ götürmüş oluruz. Dolayısıyla A, B noktalarından geçen doğrunun eğimi değişir. Grafik üzerinde de eğimin değiştiği görülmektedir. B noktasını A noktasına yaklaştırırken kesen doğrunun eğimi sabit limit değere yaklaşır. Bu limit değere A noktasındaki teğetin eğimi denir. Kısaca $f(x)$ fonksiyonunun $A[x_1, f(x_1)]$ noktasındaki eğimi denir.

Bu durum;

$$m_{AB} = \frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

şeklinde ifade edilir ve $f(x)$'in x'e göre türevidir.

Tanım: $y = f(x)$ fonksiyonu x_1'i içeren (a, b) aralığında tanımlanmış olsun. Eğer,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \text{Eğim} = m$$

limiti, sonlu $a \in R$ sayısına eşitse bu limit değere $f(x)$ fonksiyonunun x_1 noktasındaki türevi denir ve

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_1} = f'(x_1) = y'(x_1)$$

şekillerinde ifade edilir.

Örnek:

$y = f(x) = x^2$ fonksiyonunun türevini, türevin limit tanımını (türev tanımı) kullanarak bulunuz.

Çözüm:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x + h)}{h}$$

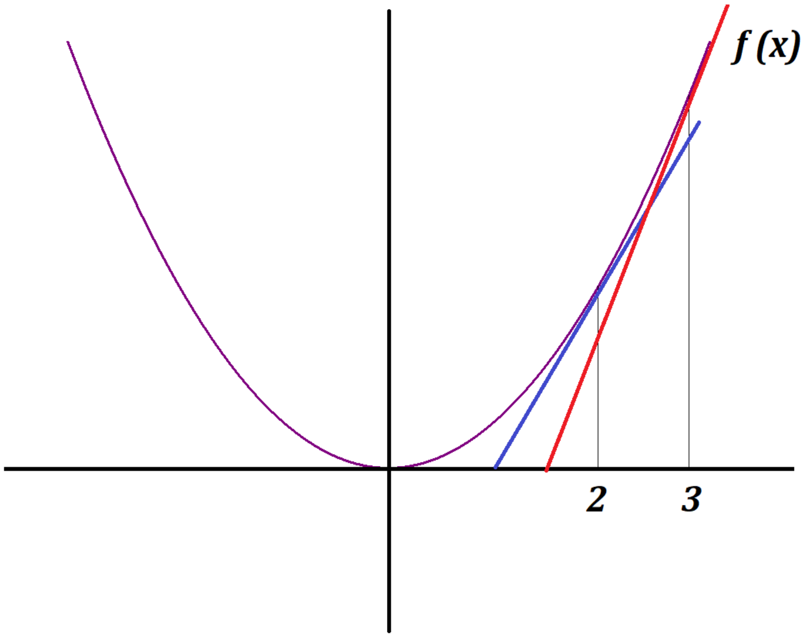
$$= \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

Fonksiyonun kendisi $f(x) = x^2$, birinci türevi ise;

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = f'(x) = 2x$$

olarak bulunur.

Aşağıdaki $f(x) = y = x^2$ fonksiyonunun grafiğini incelediğimizde $(2, 4)$, $(3, 9)$ noktalarından geçen teğetlerin eğimlerinin farklı olduğunu görürüz. $(3, 9)$ noktasından geçen teğetin eğimi $(2, 4)$ noktasından geçen teğetin eğiminden büyüktür. $(m_{(3,9)} > m_{(2,4)})$



Şekil 11.2: $y = f(x) = x^2$ fonksiyonu

Bu noktalardaki eğimleri yukarıda bulduğumuz fonksiyonun türevinde x değerlerini yerine koyarak bulabiliriz.

$$y = f(x) = x^2$$
$$y' = f'(x) = 2x$$

$x = 2$ için;

$$m_1 = f'(2) = 2.2 = 4$$

$x = 3$ için;

$$m_1 = f'(3) = 2.3 = 6$$

$x = 4$ için;

$$m_1 = f'(3) = 2.4 = 8$$

Örnek:

$f(x) = 2x^2 + x + 1$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Çözüm:

$$\lim_{h\to 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 + x + h + 1 - 2x^2 - 2x - 1}{h}$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{4xh + 2h^2 + h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(4x + 2h + 1)}{h}$$
$$\lim_{h\to 0}(4x + 2h + 1) = 4x + 1$$

Örnek:

$f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun türevinin

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}).(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h.(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h.\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h.\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Örnek:

Aşağıda verilen fonksiyonunun

$$f(q) = \frac{1}{2q}$$

türevinin

$$f'(q) = \frac{-1}{2q^2}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2(q+h)} - \frac{1}{2q}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2q-2q-2h}{h.\left(4q^2+4qh\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2h}{h.\left(4q^2+4qh\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{-2}{2\left(2q^2+2qh\right)}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-1}{\left(2q^2+2qh\right)} = \frac{-1}{2q^2}$$

Örnek:

$f(x) = \sqrt{x-3}$ fonksiyonunun türevini türevin limit tanımından faydalanarak bulunuz.

Çözüm:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h-3}-\sqrt{x-3}}{h}$$

Pay ve payda eşleniği ile çarpılırsa,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h-3}-\sqrt{x-3}}{h} . \frac{\left(\sqrt{x+h-3}+\sqrt{x-3}\right)}{\left(\sqrt{x+h-3}+\sqrt{x-3}\right)}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{x+h-3-x+3}{h.\left(\sqrt{x+h-3}+\sqrt{x-3}\right)}$$

$$= \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h-3}+\sqrt{x-3}\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{x+h-3}+\sqrt{x-3}\right)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{x+0-3}+\sqrt{x-3}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{x}-3}}$$

11.2 Türev Kuralları

Aşağıda basit ve sıkça kullanılan fonksiyonlar için türev alma kuralları verilmektedir.

1. Sabitin türevi sıfırdır veya sabit fonksiyonun türevi sıfırdır.

$f(x) = c \quad \rightarrow \quad f'(x) = 0 \qquad c = \text{Sabit}\ ,\ c \in R$

$$f(x) = 6 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 0$$
$$g(x) = -10 \quad \rightarrow \quad g'(x) = 0$$
$$h(x) = \sqrt{5} \quad \rightarrow \quad h'(x) = 0$$
$$k(x) = ln\,10 \quad \rightarrow \quad k'(x) = 0$$

2) $f(x) = x^n$; $n \neq 0$ ve $n \in R$ ise;

$$\boldsymbol{f'(x) = n.x^{n-1}}$$
$$f(x) = x^3 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 3.x^{3-1} = 3x^2$$
$$g(x) = x^5 \quad \rightarrow \quad g'(x) = 5.x^{5-1} = 5x^4$$
$$h(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \quad \rightarrow \quad h'(x) = -1.x^{-1-1} = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$
$$k(x) = \sqrt{x} = \sqrt[2]{x} = x^{1/2} \quad \rightarrow \quad k'(x) = \frac{1}{2}.x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}.x^{-\frac{1}{2}}$$
$$k'(x) = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$y = x^2\sqrt{x} = x^2x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{2}}$$
$$y' = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$$

2. $h(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$$h'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$
$$h'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h}$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$$

Örnek:

Aşağıda verilen fonksiyonunun türevini bulunuz.

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 4x^{-4}$$

Çözüm:

$$f'^{(x)} = \frac{1}{4}(4)x^3 + 4(-4)x^{-5}$$
$$f'^{(x)} = x^3 - 16x^{-5}$$
$$f'^{(x)} = x^3 - \frac{16}{x^5}$$

3) c bir sabit sayı olmak üzere;

$$\frac{d}{dx}[c.f(x)] = c.\frac{d[f(x)]}{dx} = c.f'(x)$$

4) Logaritmik Fonksiyonun Türevi

$$f(x) = \log_a x \quad \text{ise} \quad f'(x) = \frac{1}{x}.\log_a e$$
$$f(x) = \log x \quad \text{ise} \quad f'(x) = \frac{1}{x}.\log_{10} e$$

Örnek:

$$\boldsymbol{f(x) = \ln x \quad \text{ise} \quad f'(x) = 1/x}$$

5) Üstel Fonksiyonun Türevi

$$f(x) = a^x \quad \text{ise} \quad f'(x) = a^x . \ln a$$
$$\boldsymbol{f(x) = e^x \quad \textbf{ise} \quad f'(x) = e^x}$$

11.2.1 Çarpımın Türevi

ki fonksiyon çarpım olarak verilmiş ise, çarpım fonksiyonunun türevi bulunurken, birinci fonksiyonun türevi alınıp ikinci fonksiyonun kendisi ile çarpılır, ikinci fonksiyonun türevi ile birinci fonksiyonun kendisi ile çarpılır. Daha sonra bu ikisi toplanır.

$f(x)$ ve $g(x)$ herhangi iki fonksiyon ise, çarpım fonksiyonunun türevi;

$$h(x) = f(x).g(x)$$
$$h'(x) = f(x).g'(x) + f(x).g'(x)$$
$$\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x).g(x+\Delta x) - f(x).g(x)}{\Delta x}$$

$f(x+\Delta x).g(x)$ terimi bir eklenip bir çıkarılırsa,

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x).g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x).g(x) + f(x+\Delta x).g(x) - f(x).g(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x)\left[\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right] + \lim_{\Delta x \to 0} g(x)\left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) . \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right] + \lim_{\Delta x \to 0} g(x) . \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]$$
$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)}$$

11.2.3 Bölümün Türevi

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad ; \quad g(x) \neq 0$$
$$h'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$$
$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x).f(x+\Delta x) - f(x).g(x+\Delta x)}{\Delta x.g(x).g(x+\Delta x)}$$

$f(x).g(x)$ terimi bir eklenip bir çıkarılırsa,

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x).f(x+\Delta x) - f(x).g(x) + f(x).g(x) + f(x).g(x+\Delta x)}{\Delta x.g(x).g(x+\Delta x)}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)\left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] - f(x)\left[\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right]}{\Delta x.g(x).g(x+\Delta x)}$$
$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}; \ g(x) \neq 0}$$

Örnek:

$$G(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2}$$

fonksiyonunun türevini alınız.

Çözüm:

$$G'(x) = \frac{x^2(6x^2) - (2x^3+3)(2x)}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{6x^4 - 4x^4 - 6x}{(x^2)^2} = \frac{2x^4 - 6x}{x^4} = \frac{2x(x^3-3)}{x^4}$$

$$= \frac{2(x^3-3)}{x^3} = \frac{2x^3-6}{x^3} = 2 - \frac{6}{x^3}$$

Örnek:

$$y = (x - \frac{2}{\sqrt{x}})^2$$

fonksiyonunun türevini alınız.

Çözüm:

$$y = \left(x - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)\left(x - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) = x^2 - \frac{2x}{\sqrt{x}} - \frac{2x}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x}$$

$$y' = x^2 - \frac{4x}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x} = x^2 - 4x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-1}$$

$$y' = 2x - 4(\frac{1}{2})x^{-\frac{1}{2}} + 4(-1)x^{-2} = 2x - 2x^{-\frac{1}{2}} - 4x^{-2}$$

$$y' = 2x - \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{4}{x^2}$$

11.2.3 Zincir Kuralı

Eğer y, u'ya bağlı, u'da x'e bağlı bir fonksiyon ise, y'nin x'e göre türevi;

$y = f\,(u)$ ve $u = g\,(x)$ ise,

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}}$$

Örnek:

$y = u^2$

$u = 2x + 1$

$$\frac{dy}{dx} = ?$$

Çözüm:

$$y' = \boldsymbol{\frac{dy}{dx}} = \boldsymbol{\frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}} = 2u.u' = 2u.2$$

$$y' = 2(2x+1).2 = 8x + 4$$

11.2.4 Kuvvet Kuralı

x'e bağlı bir n. dereceden bir u fonksiyonunun türevi,

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = n[u(x)]^{n-1} . \frac{du}{dx}}$$

$$\frac{d}{dx}(u^n) = n.u^{n-1}.u'$$

Örnek:

$y = (x^3 - 1)^7$ fonksiyonunun türevini alınız.

Çözüm:

$$y' = 7.(x^3 - 1)^6.3x^2$$
$$y' = 21x^2.(x^3 - 1)^6$$

Örnek:

$y = \sqrt{x^2 + 5}$

$y = \sqrt{u} = u^{1/2} \quad u = x^2 + 5$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{2}\right).(x^2 + 5)^{-1/2}.2x$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{(x^2 + 5)^{1/2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}$$

Örnek:

m çalışan sayısını göstermek üzere, üretim seviyesi çalışan sayısına; $q = \frac{10m^2}{\sqrt{m^2+19}}$ şeklinde ve talep fonksiyonu da üretim seviyesine $p = \frac{900}{q+9}$ şeklinde bağlı ise, çalışan sayısı $m = 9$ iken marjinal gelir $\left(\frac{dR}{dq}\right)$ ne kadar olur?

Çözüm:

Çalışan sayısı $m = 9$ olduğunda, üretim seviyesi $q = 81$ olur.

$$R = p.q = \frac{900}{q + 9}.q = \frac{900q}{q + 9}$$
$$\frac{dR}{dm} = \frac{dR}{dq}.\frac{dq}{dm}$$
$$\frac{dR}{dm} = \frac{900(q + 9) - 900q}{(q + 9)^2}.\frac{20m(\sqrt{m^2 + 19}) - \frac{10m^3}{\sqrt{m^2 + 19}}}{m^2 + 19}$$

Yerine değerler konursa marjinal gelir aşağıdaki gibi çıkar.

$$\frac{dR}{dm} = 10{,}71$$

11) $F(x, y) = 0$ kapalı fonksiyonun türevi;

$$y' = -\frac{F'(x)}{F'(y)}$$

$F'(x)$ bulunurken y, $F'(y)$ bulunurken x sabitmiş gibi kabul edilir.

Örnek:

$x^4 + y^4 - 8 = 0$ fonksiyonunun türevini aliniz.

Çözüm:

$$4x^3 + 4y^3y' = 0$$
$$4y^3y' = -4x^3$$

$$y' = \frac{-4x^3}{4y^3} = \frac{-x^3}{y^3}$$

Örnek:

$x^3y + xy^3 = 10$ kapalı fonksiyonuna (2,1) noktasında teğet olan doğrunun eğimi kaçtır?

Çözüm:

$$x^3y' + y(3x^2) + x(3y^2y') + y^3(1) = 0$$
$$x^3y' + x(3y^2y') = -y(3x^2) - y^3(1)$$
$$y'(x^3 + 3xy^2) = -3x^2y - y^3$$

$$y' = \frac{-3x^2y - y^3}{x^3 + 3xy^2} = \frac{-3(2)^2(1) - (1)^3}{(2)^3 + 3(2)(1)^2} = -\frac{13}{14}$$

11.3 Ardışık Türevler

Bundan önce türevin de $f'(x)$ şeklinde x'in bir fonksiyonu olduğunu görmüştük. Bu hâlde bunun da x'e göre türevinden, yani, 2. türevden söz edilebilir. 2. türev, 1. türevi alınmış fonksiyonun bir kere daha türevi alınarak bulunur.

$$f''(x) = \frac{df'(x)}{dx} = y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Bu şekilde devam edilerek bir fonksiyonun her mertebeden türevi elde edilebilir. Bununla beraber, bazı fonksiyonların ardışık türevlerinin (sıfırdan farklı) sayısı sonlu bazılarının ise sonsuzdur.

Örneğin;

$$y = ax^2 + bx + c$$

fonksiyonunun ardışık üç türev mevcut, birinci mertebeden türev:

$$y' = 2ax + b$$

ikinci mertebeden türev:

$$y'' = 2a$$

üçüncü mertebeden türev:

$$y''' = 0$$

dördüncü mertebeden türev:

$$y^{(4)} = 0$$

Ancak,

$y = ln\, x$ ve $y = e^x$ fonksiyonlarının ardışık sonsuz türev mevcuttur.

$$y = e^x$$
$$y'' = e^x$$
$$y'' = e^x$$
$$\dots$$
$$y^{(n)} = e^x$$

Genel olarak n. mertebeden türev

$$f^{(n)}(x) = \frac{df^{(n)}(x)}{dx^n}$$

notasyonu ile gösterilir.

Örnek:

$f'(x) = 2x.e^{x^2}.\ln e = 2x.e^{x^2}$ (Birinci Mertebeden Türev)

$f''(x) = 2.e^{x^2} + 2x.e^{x^2}.2x = (4x^2+2)e^{x^2}$ (İkinci Mertebeden Türev)

$$f'''(x) = 8x.e^{x^2} + 2x.e^{x^2}(4x^2+2)$$

$$f'''(x) = 8x.e^{x^2} + 8x^3.e^{x^2} + 4xe^{x^2}$$

$f'''(x) = 8x^3.e^{x^2} + 12x.e^{x^2}$ (Üçüncü Mertebeden Türev)

Örnek:

Aşağıdaki fonksiyonunun ardışık türevlerini (1,2,3 mertebe) alınız.

$$y = \frac{1}{5}x^6 + 3x^4 + x$$

Çözüm:

$$y' = \frac{6}{5}x^5 + 12x^3 + 1$$

$$y" = \frac{6}{5}(5)x^4 + 12(3)x^2 = 6x^4 + 36x^2$$

$$y''' = 6(4)x^3 + 36(2)x = 24x^3 + 72x$$

Örnek:

$f(x) = 7x^3 - \frac{1}{3}x^4$ fonksiyonu için $f'''(4) = ?$

Çözüm:

$$f'(x) = 7(3)x^2 - \frac{1}{3}(4)x^3 = 21x^2 - \frac{4}{3}x^3$$

$$f"(x) = 21(2)x - \frac{4}{3}(3)x^2 = 42x - 4x^2$$

$$f'''(x) = 42 - 4(2)x = 42 - 8x$$

$$f'''(4) = 42 - 8(4) = 10$$

11.4 Bir Fonksiyonun Ardışık Türevlerinin Sağladığı Bilgi

Bir $y = f(x)$ fonksiyonunu (a, b) aralığında çeşitli ardışık türevleri tanımlı ve sonlu olsun. Bu durumda:

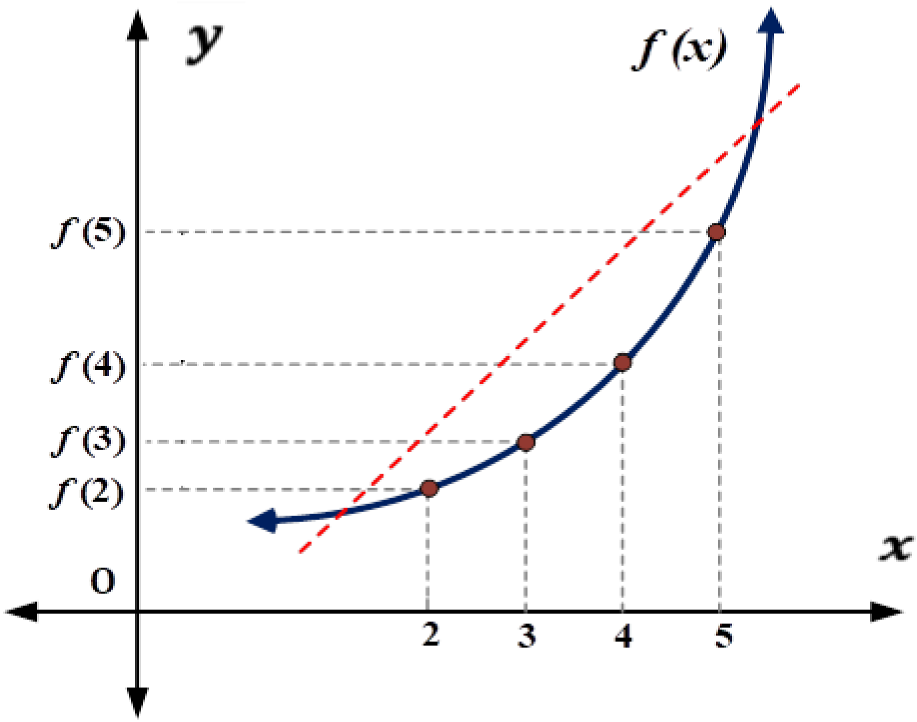
11.4.1 Birinci Türev

Bir (a, b) aralığında birinci türev; fonksiyonun artan ve azalan aralıkları ve ekstremum noktalarını verir.

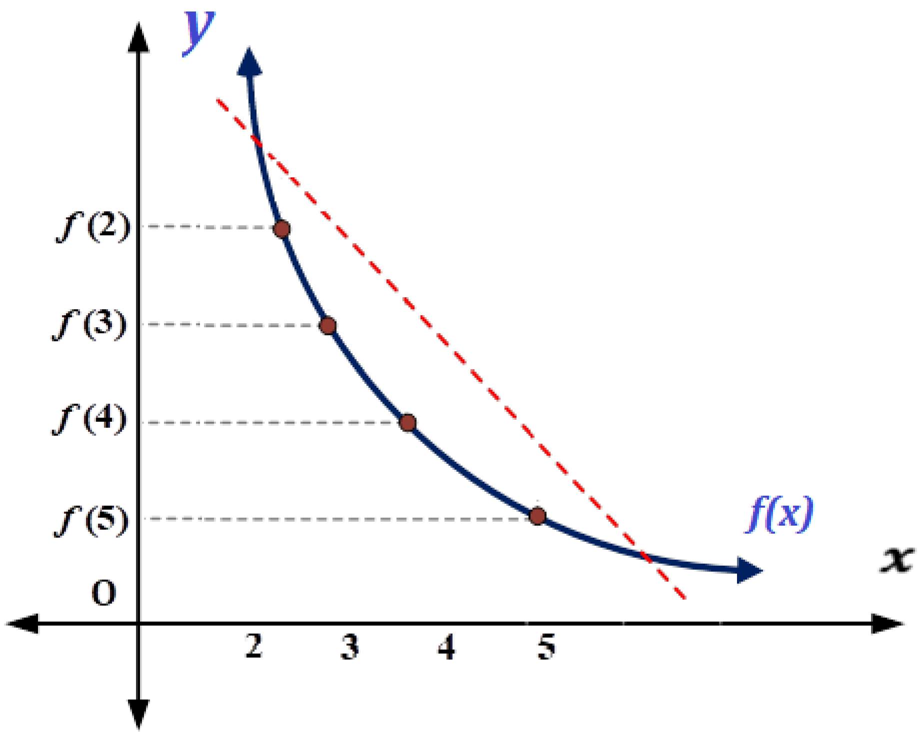
$y' = f'(x) > 0 \rightarrow f(x), (a, b)$ aralığında artar,

$y' = f'(x) < 0 \rightarrow f(x), (a, b)$ aralığında azalır,

$y' = f'(x) = 0 \rightarrow f(x), (a, b)$ aralığında bir ekstremum noktasına (tepe noktasına) sahiptir.Yani fonksiyon bu noktada artıştan azalışa veya azalıştan artışa geçer.



$f'(x) > 0$



$f'(x) < 0$

Yukarıdaki birinci grafikte fonksiyonun eğrisine herhangi bir noktadan çizilecek teğetin eğimi pozitif olacağından fonksiyon artandır. İkinci grafikte ise fonksiyonun eğrisine çizilecek teğetlerin eğimi negatif olacağından fonksiyon azalandır.

Fonksiyonun kritik noktaları;

- Birinci türevi sıfır yapan noktalar,
- Birinci türevi tanımsız yapan noktalardır.

Kritik noktalar fonksiyonun muhtemel yerel ekstremum noktalarıdır.
Örnek:

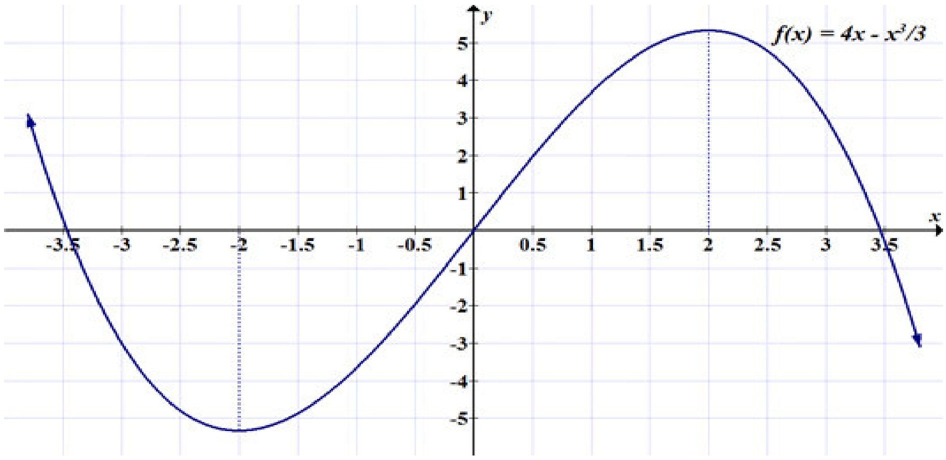
$$f(x) = 4x - \frac{x^3}{3} \text{ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz.}$$

Çözüm:
Kritik noktaları bulmak için fonksiyonun birinci türevi alınır ve sıfıra eşitlenir.

$$f'(x) = 4 - x^2 = (2 - x)(2 + x) = 0$$

$$x = 2 , x = -2 \text{ (Ekstremum noktalar)}$$

Fonksiyonun grafiği aşağıda çizilmiştir.



Şekil 11.3: Kritik Noktalar

Örnek:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$$

fonksiyonunun arttığı ve azaldığı aralıkları, fonksiyonun maksimum ve minimum olduğu noktaları bulunuz.

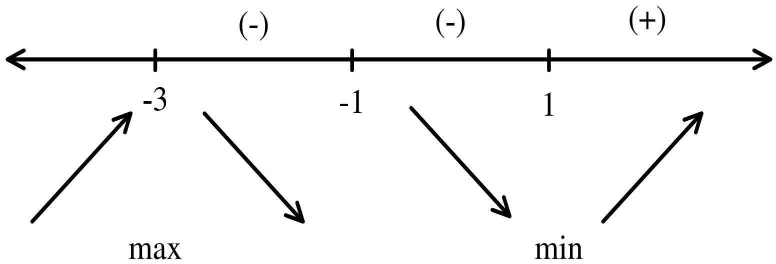
Çözüm:

$$f'(x) = \frac{(2x + 1)(x + 1) - (x^2 + x + 4)}{(x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 3x + 1 - x^2 - x - 4}{(x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2} = \frac{(x + 3)(x - 1)}{(x + 1)^2}$$

Kritik Nokta: $x = -3$, $x = 1$ ve $x = -1$ (Çift kat kök)



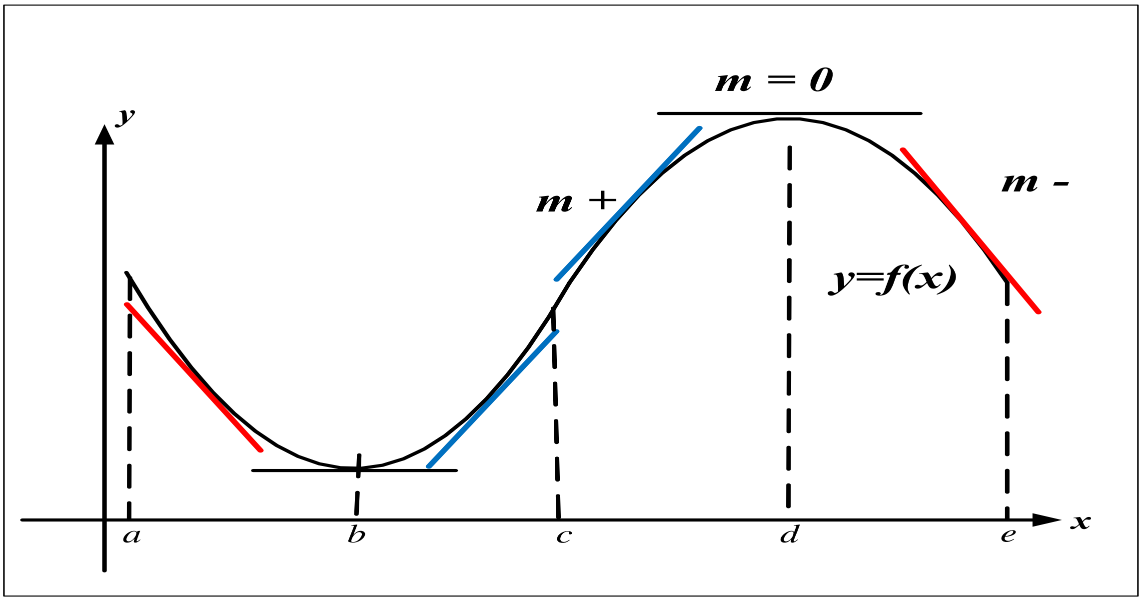
Şekil 11.4: Fonksiyonun Kritik Noktaları

11.4.2 İkinci Türev

$y" = f"(x) > 0 \rightarrow f(x), (a, b)$ aralığında çukur (konveks),
$y" = f"(x) < 0 \rightarrow f(x), (a, b)$ aralığında tümsek (konkav),
$y" = f"(x) = 0 \rightarrow f(x), (a, b)$ aralığında bir dönüm (büküm) noktasına sahiptir.
Yani çukurdan tümseğe veya tümsekten çukura geçer.
Bir (a, b) aralığında ikinci türev; fonksiyonun eğriliğini (büküm durumunu) ve büküm (dönüm) noktalarını verir. İkinci türev, birinci türevle elde edilen artışın değişimini ölçer. Yani bu artışın azalarak mı yoksa artarak mı arttığını belirler. Azalarak artma konkav (tümsek), artarak artma ise fonksiyonun konveks o bölge için konveks (çukur) olduğunu ifade eder.

11.4.3 Konvekslik ve İkinci Türev Testi

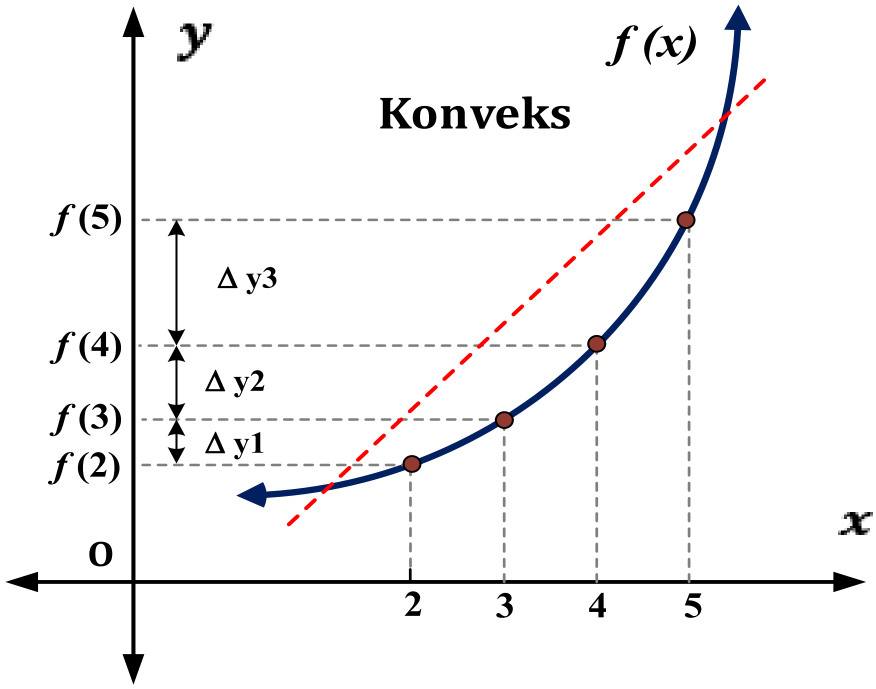
Fonksiyona bir aralıkta çizilen teğetlerin eğimi sağa doğru gidildikçe artıyorsa fonksiyon o aralıkta konvekstir. Eğer $f''(x)$ belli bir aralıkta pozitifse $f'(x)$ o aralıkta artıyor demektir. $f'(x)$ teğetin eğimi olduğundan teğet eğiminin artması demek fonksiyonun o aralıkta konveks olduğu anlamına gelir.
Fonksiyona bir aralıkta çizilen teğetlerin eğimi sağa doğru gidildikçe azalıyorsa fonksiyon o aralıkta konkavdır. Eğer $f''(x)$ belli bir aralıkta negatifse $f'(x)$ o aralıkta azalıyor demektir. $f'(x)$ teğetin eğimi olduğundan teğet eğiminin azalması demek fonksiyonun o aralıkta konkav olduğu anlamına gelir.



Şekil 11.5: Birinci Türev Testi

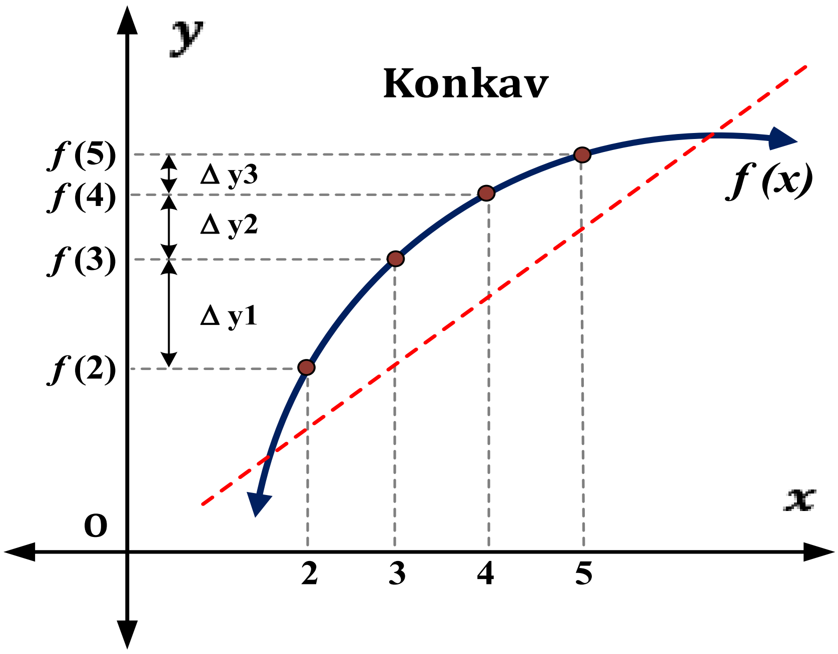
11.4.4 Büküm Noktaları

Eğer fonksiyonun bir noktada büküm noktası varsa o noktada tanımlı ise $f''(x) = 0$ olmalıdır. $f''(x)$ in tanımsız olduğu noktalarda da büküm noktası olabilir.



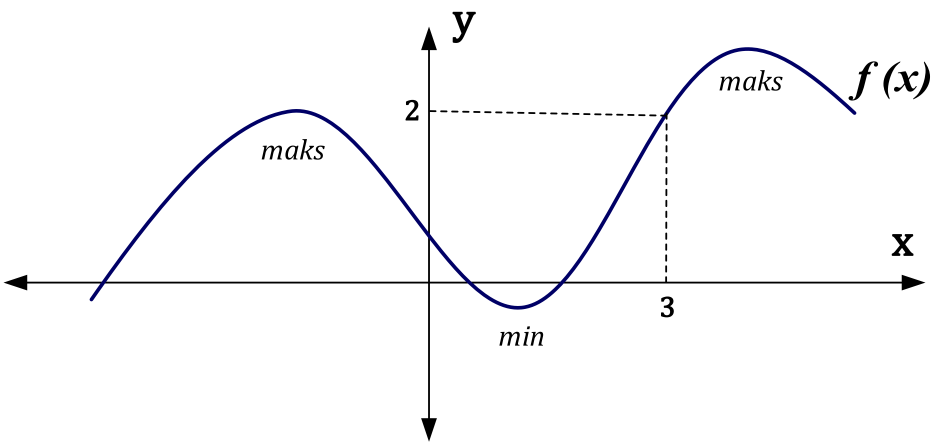
y
f (x)
Konveks
f (5)
Δ y3
f (4)
Δ y2
f (3)
Δ y1
f (2)
x
O
2
3
4
5

$f''(x) > 0$

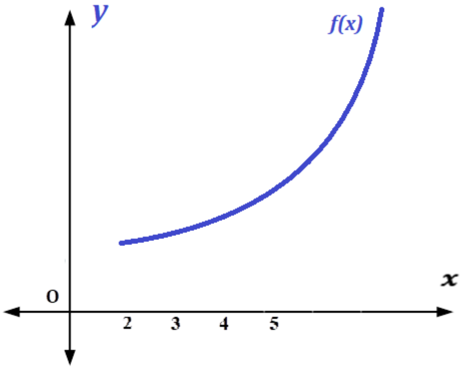


y
Konkav
f (5)
Δ y3
f (4)
Δ y2
f (3)
Δ y1
f (2)
f (x)
x
O
2
3
4
5

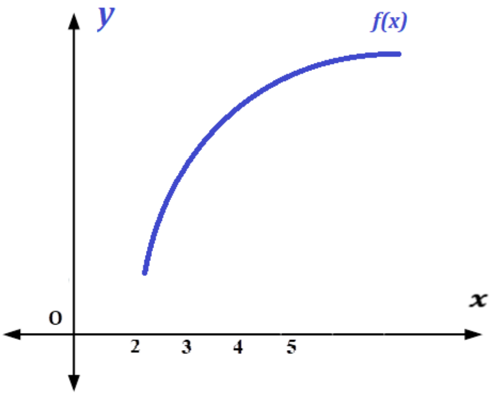
$f''(x) < 0$



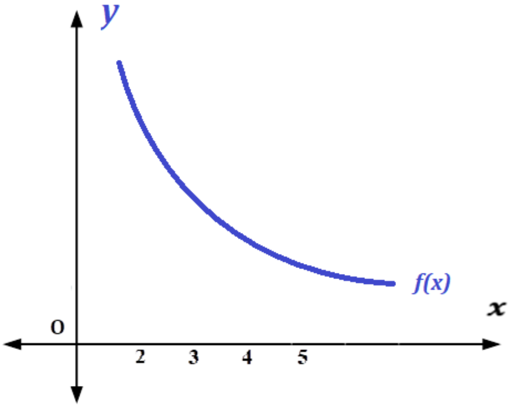
- $a < x < b$ aralığında eğer $f''(x) > 0$ ise, $f(x)$ bu aralıkta konvekstir.
- $a < x < b$ aralığında eğer $f''(x) < 0$ ise, $f(x)$ bu aralıkta konkavdır.



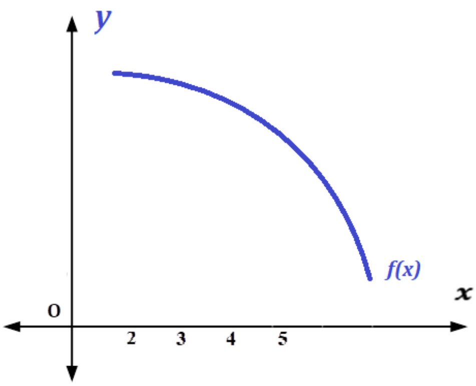
$f'(x) > 0,\ f''(x) > 0$



$f'(x) > 0,\ f''(x) < 0$



$f'(x) < 0,\ f''(x) > 0$



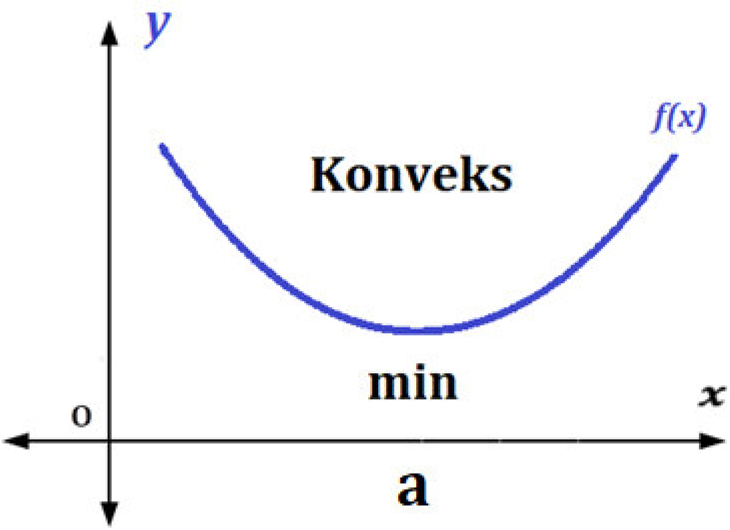
$f'(x) < 0,\ f''(x) < 0$

Şekil 11.6: Birinci ve İkinci Türev Testi

11.4.5 İkinci Türev Testi

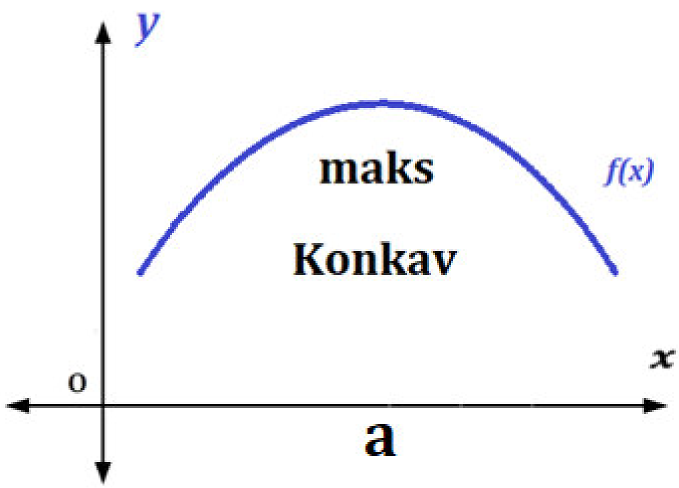
$f'(a) = 0$ ise; birinci türevin sıfır olduğu nokta için;

$f''(a) > 0$ ise $x = a$'da $f(x)$'in yerel minimumu,



Şekil 11.7: İkinci Türev Testi

- $f''(a) < 0$ ise $x = a$'da $f(x)$'in yerel maksimumu vardır.



Şekil 11.8: İkinci Türev Testi

Örnek:

$y = x^4 - 2x^2 + 4$ fonksiyonunun maksimum ve minimum noktalarını bulunuz.

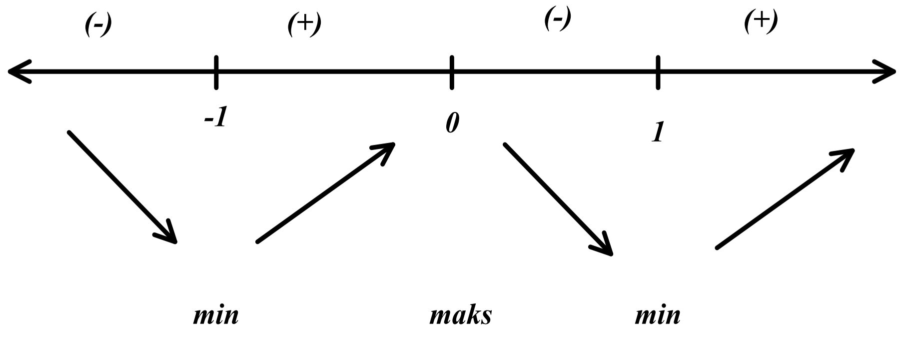
Çözüm:

$$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$$
$$y' = 4x(x - 1)(x + 1)$$

Birinci türev sıfıra eşitlenirse, (Kritik noktalar)

$x_1 = -1 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 1$

olur.



Şekil 11.9: Kritik Noktalar

İkinci türev alınırsa,

$$y'' = 12x^2 - 4$$

$$y''(-1) = 12(-1)^2 - 4 = 8 > 0$$

($x = -1$ noktasında (apsisinde) yerel minimum var.)

$$y''(0) = 12(0)^2 - 4 = -4 < 0$$

($x = 0$ noktasında (apsisinde) yerel maksimum var.)

$$y''(0) = 12(1)^2 - 4 = 8 > 0$$

($x = 1$ noktasında (apsisinde) yerel minimum var.)

Uygulama Soruları

1) $f(x) = x^3 - x^2 + 2$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki teğet denklemini hesaplayınız.

Çözüm:

$x = 1$ için; $f(1) = 1^3 - 1^2 + 2 = 2$ olduğundan, (1,2) noktasındaki teğetin eğimini bulmalıyız. Eğimin bulunması için türev alınır:

$$y'(1) = 3x^2 - 2x = 3.1^2 - 2.1 = 1$$

Eğimi 1 olan ve (1,2) noktasından geçen teğetin denklemi;

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = 1(x - 1) \rightarrow \quad y = x + 1$$

bulunur.

2) $x^2y + xy^2 = 1$ kapalı fonksiyonu veriliyor. $y' = dy/dx$ türevini hesaplayınız.

Çözüm:

$$F(x, y) = x^2y + xy^2 - 1$$

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2xy + y^2}{x^2 + 2xy}$$

3) $f(x) = x^2 + \sqrt{x} + e^x + \ln x + \frac{1}{x} + Sin\, x + Cos\, x$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Not: $(Sin\, x)' = Cos\, x$ ve $(Cos\, x)' = -Sin\, x$

Çözüm:

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} + e^x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + Cos\, x - Sin\, x$$

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde türevin tanımı, kullanım alanı, marjinal kavramı, yüksek mertebeden türevler, bir fonksiyonun azalan ya da artan olduğu aralıkların belirlenmesi, bir fonksiyonun çukur veya tümsek olduğu alanların belirlenmesi incelenmiştir.

Bölüm Soruları

1) $f(x) = x^3 + 2x - 1$ fonksiyonu için $f\,'(1) = ?$

a) -5 b) -3 c) 3 d) 5 e) 6

2) $f(x) = x^2 + kx$ fonksiyonunun $x = -1$ için türevi $y = 4x - 3$ doğrusunun eğimine eşit ise k ne olmalıdır?

a) 2 b)3 c) 4 d) 5 e) 6

3) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12$ fonksiyonunun $x = -1$' deki türevi nedir?

a) -12 b) -6 c) 0 d) 6 e) 12

4) $f(x) = 2x^3 - x^2 - 7$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasında (apsisinde) fonksiyona çizilen teğetin eğimi aşağıdakilerden hangisidir?

a) 4 b) -2 c) 0 d) 2 e) 4

5) $f\,'(x) = 3x^2 - 3$ ve $f(0) = 0$ ise $f(2) = ?$

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 12

6) $x^2 + 4y^2 = 4$ ise dy/dx aşağıdakilerden hangisidir?

a) $-3y/2x$ b) $9y/2x$ c) $-x/4y$ d) $-x/y$ e) $5/2(xy)$

7) $x^2 + y^2 = 5$ kapalı fonksiyonu için $x = 1$ ve $y = 2$ iken $y\,'(1{,}2)$ kaç olur?

a) 0 b) $3/4$ c) $-1/2$ d) $-5/8$ e) $-7/4$

8) $y = x.\ln x$ ise dy/dx aşağıdakilerden hangisidir?

a) $1 + \ln x$ b) $x + \ln x$ c) $x.\ln x$ d) $x - \ln x$ e) $x + 1/x$

9) $f(x) = x^2 - 6x + 8$ fonksiyonunun artan olduğu aralık aşağıdakilerden hangisidir?

a) $(3, \infty)$ b) $(-3, 3)$ c) $(2, 4)$ d) $(-\infty, 2) \cup (4, \infty)$ e) $(-\infty, 3)$

10) $y = x^3 - 3x^2 - 5x + 7$ fonksiyonu aşağıdaki apsislerden hangisinde dönüm noktasına sahiptir?

a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

Cevaplar

1) d, 2) e, 3) c, 4) e, 5) a, 6) c, 7) c, 8) a, 9)a, 10) d

12. FONKSİYON GRAFİKLERİNİN ÇİZİMİ

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

12.1. Asimptot Kavramı
12.2. Fonksiyonun Kritik Noktaları
12.3. Artan Azalan Fonksiyon
12.4. Yüksek Mertebeden Türevler
12.5. Fonksiyonların Konkavitesi
12.6. Bir fonksiyonun grafiğinin çizimi

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1) Asimptot nedir?
2) Fonksiyonların tanım kümesi nasıl bulunur??
3) Fonksiyonun Kritik noktalar nasıl bulunur?
4) Bir fonksiyonun grafiği çizilirken hangi aşamalar uygulanır?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	**Kazanım**	**Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği**
Artan Azalan aralıkların, İncelemesi	Bir fonksiyonun çiziminde artan ve azalan aralıkları, tepe noktalarının belirleyebilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, tekrar yaparak, Örnek problem çözerek
Konkavite İncelemesi	Bir fonksiyonun çiziminde artan ve azalan aralıkları, tepe noktalarının belirleyebilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, tekrar yaparak, Örnek problem çözerek
Fonksiyon Grafikleri	Elde edilen bilgileri tablolamak ve Fonksiyon grafiği çizebilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, tekrar yaparak, Örnek problem çözerek

Anahtar Kavramlar

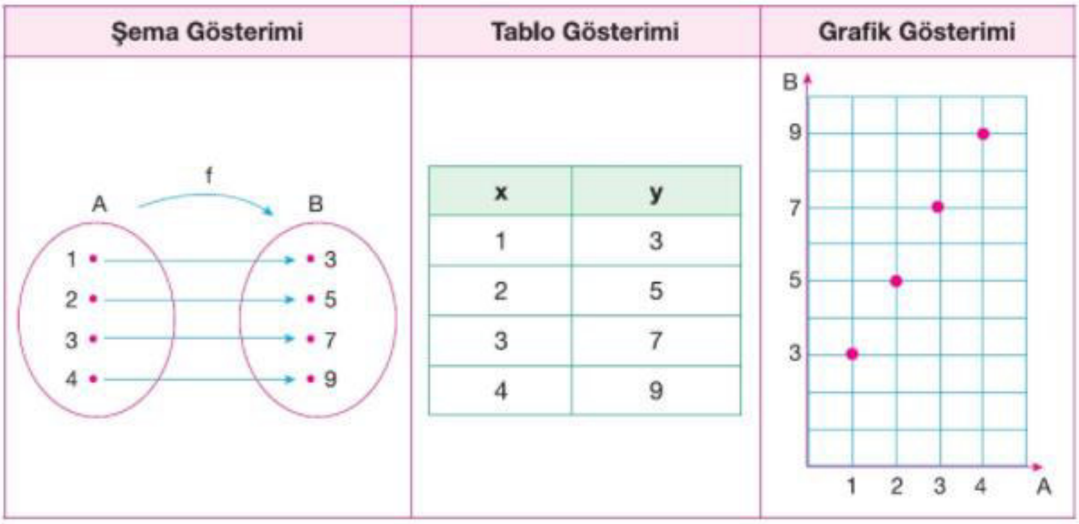
- Marjinal Kavramı
- Esneklik (Elastikıyet)

Giriş

$f: A \rightarrow B$ $f(x) = y$ fonksiyonu verildiğinde $f = \{(x, y): y = f(x),\ x \in A, y \in B)$ kümesine düzlemde karşılık gelen noktaların oluşturduğu şekle fonksiyonun grafiği denir.

Bir (a, b) sıralı ikilisini oluşturan bileşenler bir f fonksiyonunun kuralı olan $y = f(x)$ eşitliğini $b = f(a)$ şeklide sağlarsa koordinatları (a, b) olan nokta f fonksiyonunun grafiği üzerindedir. Bu ifadenin tersi de doğrudur. Şöyle ki, eğer $y = f(x)$ ile verilen fonksiyonun grafiği üzerindeki bir noktanın koordinatları (a, b) ise a ile b arasında $b = f(a)$ ilişkisi vardır. Fonksiyonlar bölümünden hatırlayacağınız gibi A tanım kümesinden bir eleman $b = f(a)$ ise B görüntü kümesine ait bir eleman olmalıdır. Bu durumda b, a'nın altındaki görüntüsüdür veya "f'nin a'daki değeri b'dir" denir.

Sıralı ikililerin birinci bileşeni tanım kümesinin, ikinci bileşeni görüntü kümesinin elemanlarıdır. Bu sıralı ikilileri grafik düzlemde nokta nokta işaretlenerek fonksiyonun koordinat düzlemindeki görüntüsü yani fonksiyonun grafiği elde edilir. Aşağıda tanım ve görüntü kümesi verilen bir fonksiyonun şema gösterimi, değerleri içeren tablo gösterimi ve düzlemdeki görüntüsü yani grafiği verilmektedir.



Şekil 12.1: Fonksiyon verileri ve grafiği

Herhangi bir $y = f(x)$ fonksiyonu verildiğinde bunun grafiği çizilirken gerekli adımlar 7 başlık halinde aşağıda verilmiştir.

12.1 Fonksiyonun Tanım Kümesi

Fonksiyon grafiklerinin çiziminde ilk adım verilen fonksiyonun tanım aralığını belirlemektir. Verilen tek değişkenli $f(x)$ fonksiyonunda x yerine konabilecek sayıların kümesine $f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesi denir. Önce verilen fonksiyonun türüne göre x yerine konamayacak sayı olup olmadığı araştırılır. x yerine konamayacak sayılar (fonksiyonu tanımsız yapan değerler) reel sayı kümelerinden çıkarılır.

Verilen fonksiyon polinom fonksiyon ise, polinom fonksiyonlar reel sayılar kümesinde tanımlıdır. x yerine konamayacak herhangi bir sayı yoktur.

Örnek:

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ biçiminde bir polinom fonksiyonun tanım kümesi R sayılarından oluşur. x yerine konamayacak herhangi bir reel sayı yoktur.

Verilen fonksiyon çift olan dereceden köklü bir fonksiyon ise, kök içerisinde bulunan ifadenin 0 veya 0'dan büyük reel sayılar olması gerekir.

Örnek:

$f(x) = \sqrt{x - 5}$ biçiminde bir çift olan dereceden köklü bir fonksiyon ise fonksiyonun tanım kümesi kök içerisinde bulunan ifadenin 0 veya 0'dan büyük reel sayılar olması gerekir.

$$x - 5 \geq 0$$
$$x \geq 5$$

Dolayısıyla fonksiyonun tanım kümesi $[5, \infty)$ aralığıdır. 5'in sol tarafında bulunan 5'ten küçük sayılar için fonksiyon tanımlı değildir.

Verilen fonksiyon logaritmik fonksiyon ise, logaritması bulunacak olan ifadenin 0'dan büyük reel sayılar olması gerekir.

Örnek:

$f(x) = \ln\,(x - 3)$ biçiminde logaritmik fonksiyon ise, logaritması bulunacak olan ifadenin 0'dan büyük reel sayılar olması gerekir.

$$x - 3 > 0$$
$$x > 3$$

Dolayısıyla fonksiyonun tanım kümesi $(3, \infty)$ aralığıdır. 3 ve 3'ün sol tarafında bulunan 3'ten küçük sayılar için fonksiyon tanımlı değildir.

Verilen fonksiyon bir rasyonel fonksiyon ise, rasyonel fonksiyonun paydasını sıfıra eşitleyen x değerlerinde fonksiyon tanımlı değildir. Dolayısıyla x yerine konamayacak sayılar bulunur. Bunun dığında kalan reel sayılar kümesi fonksiyonun tanım kümesini oluşturur.

Örnek:

$$f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$$

biçiminde bir rasyonel fonksiyon verilmiş ise rasyonel fonksiyonun paydasını sıfıra eşitleyen x değerlerinde fonksiyon tanımlı değildir.

$$x - 1 = 0$$
$$x = 1$$

Dolayısıyla fonksiyonun tanım kümesi $R - \{\ 1\ \}$ aralığıdır. Bu ifadenin bir diğer yazılışı da $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ biçimindedir.

12.2 Asimptotik Değerler

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin sonsuzda teğet olduğu varsayılan doğru veya eğrilere veya fonksiyonu tanımsız yapan değerlere asimptot denir.

Yatay Asimptot

Bir fonksiyon için x, negatif sonsuza $(-\infty)$ sağdan yaklaşırken limiti,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = c \quad ; \ (c \text{ sabit})$$

ve aynı fonksiyon için x, pozitif sonsuza (∞) soldan yaklaşırken limiti,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = c \quad ; \ (c \text{ sabit})$$

ise bu durumda;

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = c \quad ; \ (c \text{ sabit})$$

olur. Bu sonuç nun fonksiyonun yatay asimptotunun $y = c$ doğrusu olduğunu gösterir.

Düşey (Dikey) Asimptot

Bir fonksiyon için x, belirli bir c değerine sağdan yaklaşırken limiti,

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty$$

ve aynı fonksiyon için x, belirli bir c değerine soldan yaklaşırken limiti,

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$$

ise bu durumda; fonksiyonun düşey asimptotunun $y = c$ doğrusu olduğunu gösterir. Rasyonel fonksiyonlarda paydayı sıfır yapan $[Q(x) = 0]$ noktalarda fonksiyon düşey asimptota sahiptir.

Örnek:

$$f(x) = \frac{3x + 1}{x - 1}$$

Fonksiyonunun yatay ve düşey asimptotlarını bulunuz.

Çözüm:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + 1}{x - 1} = 3$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x + 1}{x - 1} = 3$$

Dolayısıyla; $y = 3$ doğrusu f fonksiyonun yatay asimptotudur.

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{3x + 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{3.1 + 1}{1{,}001 - 1} = \mathop{lim}_{x \to 1^+} \frac{\text{Sayı}}{0^+} = +\infty$$

Fonksiyon 1’e sağdan yaklaşırken $+\infty$’a gider.

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{3x + 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{3.1 + 1}{0{,}999 - 1} = \mathop{lim}_{x \to 1^+} \frac{\text{Sayı}}{0^-} = -\infty$$

Fonksiyon 1’e soldan yaklaşırken $-\infty$’a gider.

Dolayısıyla; $x = 1$ doğrusu f fonksiyonun düşey asimptotudur.

Eğik Asimptot

y, payının derecesi paydasının derecesinden bir derece büyük rasyonel fonksiyon olması halinde ortaya çıkar. Rasyonel fonksiyonlarda payın derecesi paydanın derecesinden büyük olduğunda bölme işlemi yapılır. Kesirli kısım dışında kalan tam kısım fonksiyonun eğik asimptotu olur.

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{P(x)} & \mathbf{Q(x)} \\ \cline{2-2} & \mathbf{K(x)} \\ - \quad\quad & \\ \hline \mathbf{R(x)} & \end{array} \qquad\qquad y = \frac{P(x)}{Q(x)} = K(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Örneğin,

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2+1}{x-1} = K(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

$$y = \frac{x^2+1}{x-1} = x + 1 + \frac{2}{x-1}$$

$$K(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} = x + 1 + \frac{2}{x-1}$$

$R(x) = 2$ ve $Q(x) = x - 1$,

$$K(x) = x + 1$$

bulunur. Dolayısıyla $z = x + 1$ doğrusu eğik asimptot olur.

Payın derecesi paydanın derecesinden 1 büyük ise, eğik asimptot doğrusal, payın derecesi paydanın derecesinden 2 büyük ise, eğik asimptot bir parabol şeklindedir.

12.3 Fonksiyonun Eksenleri Kestiği Noktalar

Bir fonksiyonun x ve y eksenlerini hangi nokta ya da noktalarda kestiği önemlidir. Herhangi bir fonksiyon y eksenini eğer $x = 0$ fonksiyonun tanım kümesi içerisinde yer alıyor ise, y eksenini tek bir noktada keser. Birden fazla noktada y eksenini kesen grafikler fonksiyon tanımına uygun olmaz, onlar fonksiyon değildir. Fonksiyon x=0 apsisi için y eksenini keser. Dolayısıyla fonksiyonda $x = 0$ değeri yerine konarak fonksiyonun alacağı değer hesaplanır. Bu şekilde y eksenini nerede kestiği belirlenmiş olur.

Benzer şekilde fonksiyonun x eksenini hangi nokta ya da noktalarda kestiğini bulmak için $y = 0$ yapılır. Yani verilen fonksiyon sıfıra eşitlenir. Herhangi bir fonksiyon türüne göre x eksenini hiç kesmeyebilir, tek noktada kesebilir veya birden fazla noktada kesebilir.

- $x = 0 \rightarrow y = ?$ fonksiyonunun y eksenini kestiği nokta,
- $y = 0 \rightarrow x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ fonksiyonunun kökleri veya x eksenini kestiği nokta veya noktalar.

12.4 Fonksiyon için Birinci Türev Testi

Önceki bölümde anlatıldığı gibi, bir fonksiyonun birinci türevi fonksiyonun ne şekilde değişim gösterdiğini ifade eder. Fonksiyonun hangi aralıkta arttığını, hangi aralıkta azaldığını veya hangi noktalarda tepe noktalarına sahip olduğunu belirtir. Bu tepe noktalarına ekstremum noktalarda denir. Bunlar $y' = f'(x)$ türevinin işaret değiştirdiği noktalar veya (max, min) noktalarıdır.

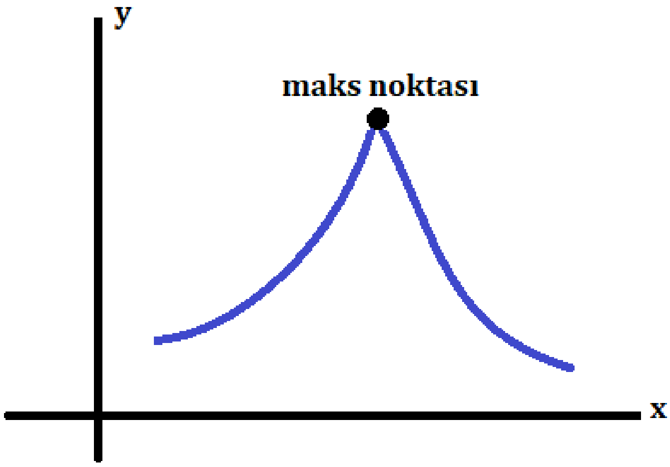
a) Fonksiyonun birinci türevi alınır ve sıfıra eşitlenir. Buradan fonksiyonun (ekstremum noktalar) tepe noktalarının apsis değerleri elde edilir.

$$y' = f'(x) = 0 \qquad x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

b) Aynı şekilde fonksiyonun birinci türevinin sıfırdan büyük olduğu reel sayı aralığında fonksiyon artan, sıfırdan küçük olduğu aralıkta fonksiyon azalan fonksiyon olur.

- $f\,'(x) > 0$ ise fonksiyon o aralıkta artan,
- $f\,'(x) < 0$ ise fonksiyon o aralıkta azalan,

Not: Bazı fonksiyonlarda türev sıfır olmadan da işaret değiştirebilir. Bu durumda $f'(x) = 0$ olmadığı halde bir maksimum veya minimum noktası elde edilebilir.



c) Türevin kökleri fonksiyonda yerine konarak:

- $f(x_1) = y_1', f(x_2) = y_2'$ .... $f(x_m) = y_m'$ değerleri elde edilir.

12.5 Fonksiyon için İkinci Türev Testi

Bir fonksiyonun ikinci türevi fonksiyonun bükeyliğini tarif eder. Fonksiyonun hangi aralıkta konveks (yukarı bükey-çukur), hangi aralıkta konkav (aşağı bükey-tümsek) veya hangi noktalarda dönüm noktalarına sahip olduğunu belirtir. Dönüm noktaları fonksiyonun büküm değiştirdiği noktalardır. Bu noktalarda fonksiyon çukurdan tümseğe veya tümsekten çukura geçer.

$$y'' = f\,''(x)$$

- $y'' = f\,''(x) = 0$ $\{x = x_1, \ldots\ldots, x_k\}$ fonksiyonun dönüm noktaları
- Bu değerler $y = f(x)$ de yerine konarak dönüm noktalarının ordinatları bulunur.

$$f''(x_1) = y_1'', \ldots, f''(x_k) = y_k''$$

- $f''(x) > 0$ ise fonksiyon bu aralıkta çukur (konveks),
- $f''(x) < 0$ ise fonksiyon bu aralıkta tümsek (konkav) olur.

12.6 Elde Edilen Bilgilerden Tablo Oluşturulması

Bu aşamada ilk 5 adımda elde edilen bilgiler tabloda toplanır. Fonksiyonun tanım kümesi, asimptotik değerler, fonksiyonun x ve y eksenleri kestiği nokta ya da noktalar, fonksiyonun ektremum noktaları, fonksiyonun arttığı azaldığı aralıklar, fonksiyonun hangi aralıkta konveks hangi aralıkta konkav olduğu ve hangi noktalarda dönüm (büküm) noktalarına sahip olduğu bir tablo ile belirtilir.

12.7 Fonksiyon Grafiğinin Düzlemde Görüntülenmesi

Bir önceki adımda oluşan tablo bilgileri xy kartezyen koordinat düzleminde (grafik düzlem) grafiği çizilir.

Örnek:

$$f(x) = y = 3x^4 - 4x^3$$

fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

1) Verilen fonksiyon bir polinom fonksiyondur. Polinom fonksiyonların tanım kümesi reel sayılar R kümesinden oluşur.

2) Grafiği çizilecek fonksiyon bir polinom fonksiyon olduğu işin yatay ve düşey asimptota sahip değildir.

3) Fonksiyonun y-eksenini kestiği noktayı bulmak için, fonksiyonda x yerine sıfır yazılır.
$x = 0$ için,

$$f(0) = 3.0^4 - 4.0^3 = 0$$

Buna göre fonksiyon (0,0) noktasından yani orijinden geçer.
Fonksiyonun x-eksenini kestiği noktayı (veya noktalar) bulmak için fonksiyon sıfıra eşitlenir.
$y = f(x) = 0 \rightarrow 3x^4 - 4x^3 = 0$ denklemi çözülerek;

$$x^3(3x - 4) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ve} \quad x = \frac{4}{3}$$

bulunur.
Bu bilgiden fonksiyonun,

$$(0,0) \quad \text{ve} \quad (\frac{4}{3}, 0)$$

noktalarından geçtiği (fonksiyonun kökleri) elde edilmiş olur.

4) $f'(x) = 12x^3 - 12x^2$ bulunur. Bulunan birinci türev sıfıra eşitlenerek fonksiyonun tepe noktalarının apsis değerleri belirlenir.

$$12x^3 - 12x^2 = 0$$

denkleminden,

$$12x^2(x - 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ ve } x = 1$$

noktalarında fonksiyon tepe noktalarına sahiptir. Bu noktalın dışında kalan bölgelerde yine fonksiyonun değişimi (arttığı veya azaldığı aralıklar) incelenir.
$(-\infty, 0)$, $(0,1)$ ve $(1, \infty)$ aralıklarında herhangi bir değer alınarak fonksiyonun o aralıkta değişimine bakılırsa,

- $x = -5$ için, $12.(-5)^3 - 12.(-5)^2 < 0$ olduğundan fonksiyon bu aralıkta azalan,
- $x = 0{,}5$ için, $12.(0{,}5)^3 - 12.(0{,}5)^2 < 0$ olduğundan fonksiyon bu aralıkta da azalan,
- $x = 2$ için, $12.(2)^3 - 12.(2)^2 > 0$ olduğundan fonksiyon bu aralıkta artan durumundadır.

Bu bilgilerden daha önce elde ettiğimiz tepe noktalarının karakteri belirlenir. Örneğin 1 apsisindeki tepe noktası için fonksiyon azalıştan artışa geçtiği için bu noktanın bir minimum noktası olduğu görülür.

5) İkinci mertebeden türev incelemesi yapılır.

$$f''(x) = 36x^2 - 24x$$

bulunur. Bulunan ikinci türev sıfıra eşitlenirse;

$$f''(x) = 36x^2 - 24x = 0$$

$$12x(3x - 2) = 0$$

denkleminden,

$$x = 0 \text{ ve } x = 2/3$$

noktalarında fonksiyonun büküm değiştirdiği görülür.

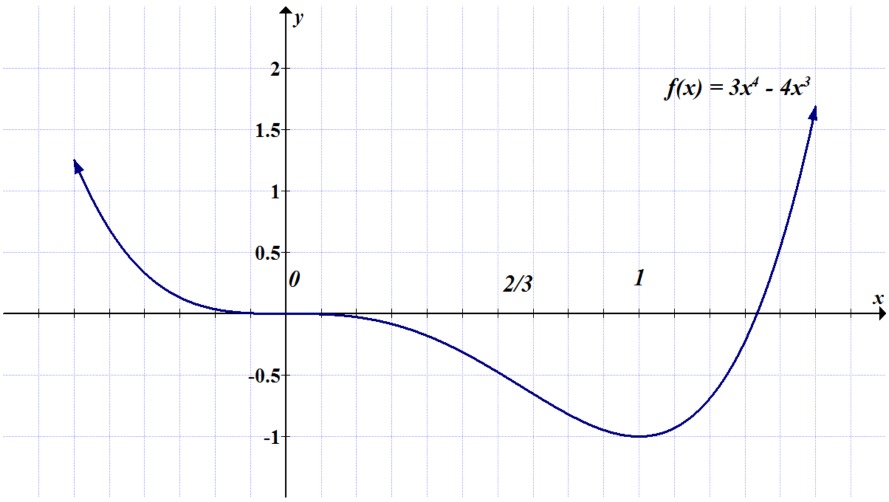
Bu noktaların dışında kalan aralıklarda fonksiyonun ikinci türevinde rasgele değerler verilerek işaretler incelenir.

- $x = -2$ için, $36.(-2)^2 - 24.(-2) > 0$ olduğundan fonksiyon bu aralıkta çukur,
- $x = 1/3$ için, $36.(0{,}33)^2 - 24.(0{,}33) < 0$ olduğundan fonksiyon bu aralıkta tümsek,
- $x = 2$ için, $36.(2)^2 - 24.(2) > 0$ olduğundan fonksiyon bu aralıkta çukur olduğu anlaşılır.

6) Elde edilen bilgilerin bir tabloda gösterilmesi

x	-∞	0	$2/3$	1	$4/3$	+∞
y	+∞	0		-1	0	+∞
y'	-		0		-	+
y''	+	0	0	+	+	+

6) Oluşturulan tablodan hareketle fonksiyon grafiğinin iki boyutlu düzlemde çizimi gerçekleştirilir.



Şekil 12.2: Fonksiyonun Grafiği

Örnek:

Aşağıdaki fonksiyonun grafiğini çiziniz.

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$$

Çözüm:

1)Tanım kümesi:

$$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$$

Dolayısıyla

$$\text{T.K.} = R - \{-1\}$$

2) Asimptotik Değerler

Yatay asimptot:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x+1}{x+1} = 2$$

$x = 2$ doğrusu yatay asimptottur.

c) Düşey Asimptot:

$$\lim_{x \to -1} \frac{2(-1)+1}{(-1)+1} = \infty$$

$x = -1$ doğrusu düşey asimptot.

3) Fonksiyonun eksenleri kestiği noktalar:

$x = 0$ için;

$$f(0) = \frac{2x+1}{x+1} = \frac{2.0+1}{0+1} = 1$$

$y = 0$ için;

$$\frac{2x+1}{x+1} = 0 \quad \rightarrow x = \frac{-1}{2}$$

4) Birinci türev incelemesi

$$y' = \frac{2.(x+1) - (1).(2x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

Fonksiyon her bölgede artan olur.

5) İkinci Türev İncelemesi

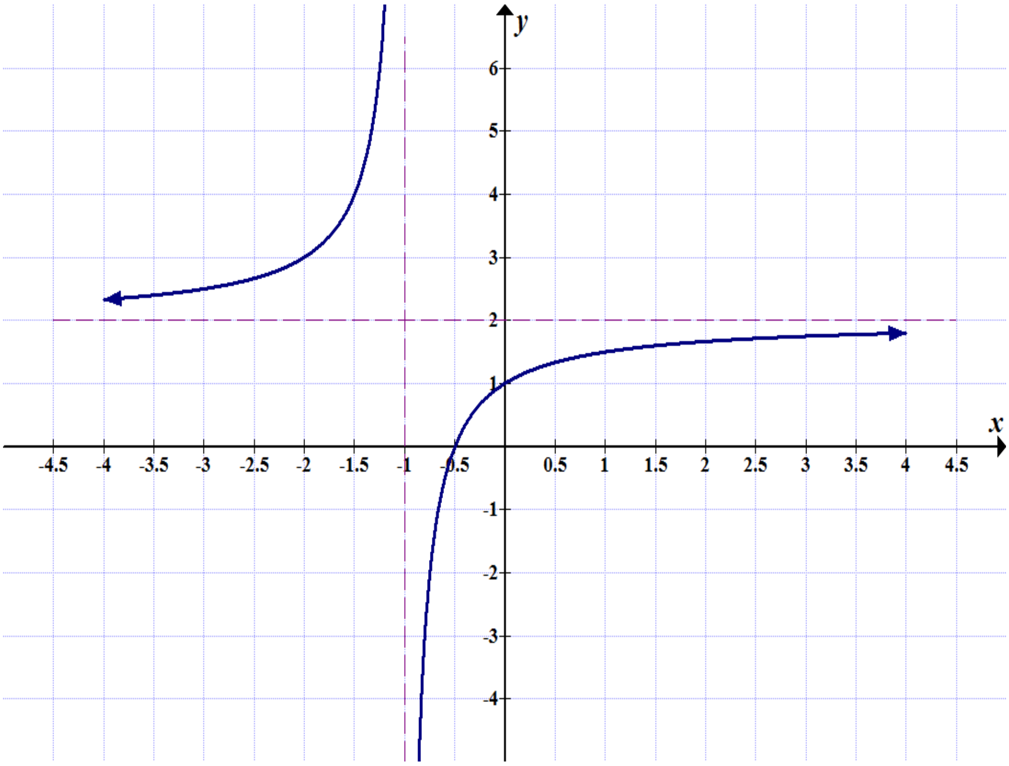
$$y'' = \frac{0.(x+1)^2 - 2.(x+1).(1).(1)}{(x+1)^4}$$

$$y'' = \frac{0.(x+1) - 2.(1)}{(x+1)^3} = \frac{-2}{(x+1)^3}$$

Fonksiyon $x < -1$ iken konveks, $x > -1$ iken konkav dolayısıyla grafik aşağıdaki gibi olur.

6) Elde edilen bilgiler ışığında tablo oluşturulması

7) Elde edilen bilgiler ışığında fonksiyon grafiğinin çizimi



Şekil 12.3: Fonksiyonun Grafiği

Uygulama

$$y = e^{-x^2}$$

fonksiyonunun grafiğini, grafik çizimi adımlarını da açıklayarak çiziniz.

1) Fonksiyonun Tanım Aralığı

Fonksiyonu tanımsız yapan herhangi bir x değeri yok. x her noktada tanımlı. Dolayısıyla fonksiyonun tanım aralığı $(-\infty, \infty)$ olur.

1) Asimptotik Değerler

a) Yatay Asimptot:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{e^{\infty}} = 0^+$$

Dolayısıyla fonksiyon $\pm\infty$'a giderken $y = 0$ 'da yatay asimptota sahiptir.

b) Düşey Asimptot:

y'yi sonsuz yapan x'in sonlu değerleri: Fonksiyon her noktada tanımlı olduğu için düşey asimptot yoktur.

3) Özel Değerler - Fonksiyonun Eksenleri Kestiği Noktalar

a. $x = 0 \rightarrow y = e^0 = 1$, fonksiyon y eksenini (0, 1) noktasında keser.

b. $y = 0$ için, fonksiyonu sıfır yapan herhangi bir x değeri yoktur. Fonksiyon x eksenini kesmemektedir. Sonsuzda $y = 0$ limit değerine ulaşılmaktadır.

4) Ekstremum Noktaları

a. Birinci türev alınır ve kökleri bulunur.

$$y' = -2x.e^{-x^2}$$

$y' = f'(x) = 0$ için;

$$x = x_1 = 0$$

b. $(-\infty, 0)$ aralığında $f'(x) > 0$ olur ve bu arlıkta fonksiyon artar.
$(0, \infty)$ aralığında $f'(x) < 0$ olur ve bu arlıkta fonksiyon azalır.

c. Türevin kökleri fonksiyonda yerine konarak:

$$f(0) = 1$$

değerleri elde edilir.

5) Büküm Noktaları

Bunlar $y" = f"(x)$ ikinci türevinin işaret değiştirdiği noktalardır. Bu noktalarda fonksiyon çukurdan tümseğe veya tümsekten çukura geçer.

a. $y'' = f''(x) = 0$

$$\{x = x_1, \ldots, x_k\}$$

fonksiyonun büküm noktaları

$$y = e^{-x^2}$$

$$y' = -2xe^{x^2}$$

$$y'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2} = 0$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \text{ ve } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

noktaları büküm noktalarıdır.

b.

$$\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ ve } \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\infty\right)$$

aralıklarında $f''(x) > 0$, $f(x)$ çukur (yukarı bükey),

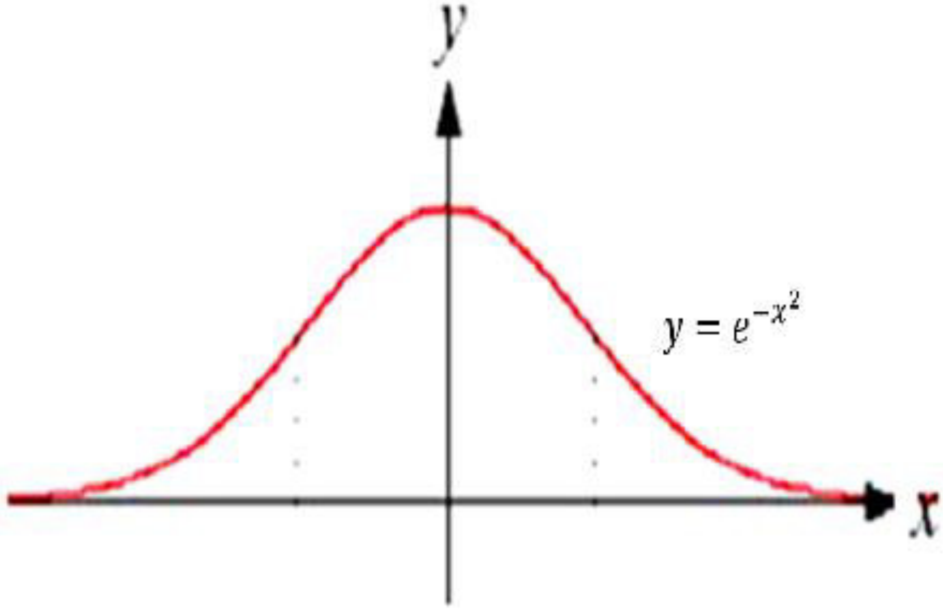
$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

aralığında $f''(x) < 0$, $f(x)$ tümsek (aşağı bükey) olur.

6) Toplanan bilgiler bir tabloda gösterilmesi

Grafiği kolay çizilebilen her fonksiyon için tablo oluşturmak şart olmayabilir. Elde edilen bilgilerle tablo oluşturmadan da fonksiyon grafiği çizilebilir.

7) Önceki adımlarda elde edilen bilgilerle fonksiyonun grafiği çizilir.



Şekil 12.4: $y = e^{-x^2}$ Fonksiyonunun Grafiği

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bir fonksiyonun çizim aşamaları ayrıntılı olarak gösterilmiştir. Fonksiyon çizimini kapsayan 7 adımın detayları farklı örnekler için ayrıntılı olarak incelenmiş ve sonunda fonksiyonun grafiği eksen takımına yani düzleme aktarılmıştır.

Bölüm Soruları

1) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 12$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktaları aşağıdakilerden hangisidir?

a) $x = -1$
b) $x = 2$
c) $x = -1$ ve $x = 2$
d) $x = -1$ ve $x = 4$
e) $x = -2$ ve $x = 2$

2) $y = 2x /(9x^2 - 1)$ fonksiyonu için yatay asimptot aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y = -2/9$
b) $x = 2/9$
c) $y = 2/9$
d) $x = 0$
e) $y = 0$

3) $f(x) = 50/(x - 3)$fonksiyonunun dikey (düşey) asimptotu aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y = 50$
b) $y = 3$
c) $x = 0$
d) $x = 3$
e) $x = \infty$

4) $y = 1 + \ln x$ fonksiyonunun konkav (tümsek) olduğu aralık aşağıdakilerden hangisidir?

a) $(0, 1)$
b) $(0, e)$
c) $(0, \infty)$
d) (e, ∞)
e) $(1/e, \infty)$

5) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$ fonksiyonunun büküm (dönüm) noktasının apsisi aşağıdakilerden hangisidir?

a) $x = 3/2$ b) $x = 1/2$ c) $x = -1/2$ d) $x = -3/2$ e) Yoktur

6) $y = \frac{5x-1}{x+1}$ fonksiyonunun yatay aimptotu aşağıdakilerden hangisidir?

a) $x = 5$
b) $y = 5x$
c) $y = 5x - 1$
d) $x = 5y$
e) y = 5

7) $y = \frac{5x-1}{x+1}$ fonksiyonunun düşey aimptotu aşağıdakilerden hangisidir?
a) $x = -1$
b) $y = -1$
c) $x = 1$
d) $y = x$
e) $y = x - 1$

8) $y = \frac{5x-1}{x+1}$ fonksiyonunun hangi aralıkta artandır?
a) $R - \{-1\}$
b) $R - \{1\}$
c) R
d) $x = -1$
e) $R - \{0\}$

9) $y = \frac{5x-1}{x+1}$ fonksiyonunun hangi aralıkta azalandır?
a) $R - \{-1\}$
b) $R - \{1\}$
c) R
d) $\emptyset$
e) $R - \{0\}$

10) $y = \frac{5x-1}{x+1}$ fonksiyonunun hangi aralıkta konvekstir?
a) $x > -1$
b) $x > 0$
c) $x < 1$
d) $x = -1$
e) $x < -1$

11) $y = \frac{5x-1}{x+1}$ fonksiyonunun hangi aralıkta konkavdır?
a) $x > 0$
b) $x > -1$
c) $x < 1$
d) $x < -1$
e) $x = -1$

Cevaplar

1) d, 2) e, 3) d, 4) c, 5) b, 6) e, 7) a, 8) a, 9) d, 10) e, 11) b

13. DİFERANSİYEL VE ESNEKLİK KAVRAMI

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

13.1. Diferansiyel Kavramı
13.2. Doğrusallaştırma
13.3. Talep Esnekliği

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1) Difernsiyel

2) Talep hangi durumda elastik (esnek)olur?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	Kazanım	Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği
Esneklik	Bir talep fonksiyonun nokta elastikiyetini belirleyebilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, tekrar yaparak
Diferansiyel	Fiferansiyel kavramını anlamak	Okuyarak, fikir yürüterek, örnek uygulama yaparak

Anahtar Kavramlar

- Diferansiyel Kavramı
- Esneklik (Elastikıyet)

Giriş

Bu bölümün birinci kısmında türevin iktisadi uygulamalarından diferansiyel yaklaşımı ile bir fonksiyonun herhangi bir noktada alacağı değer ve ikinci kısımda da mikro iktisat dersinin en çok uğraşı alanlardan biri olan talep esnekliği kavramları ayrıntılı olarak incelenmektedir.

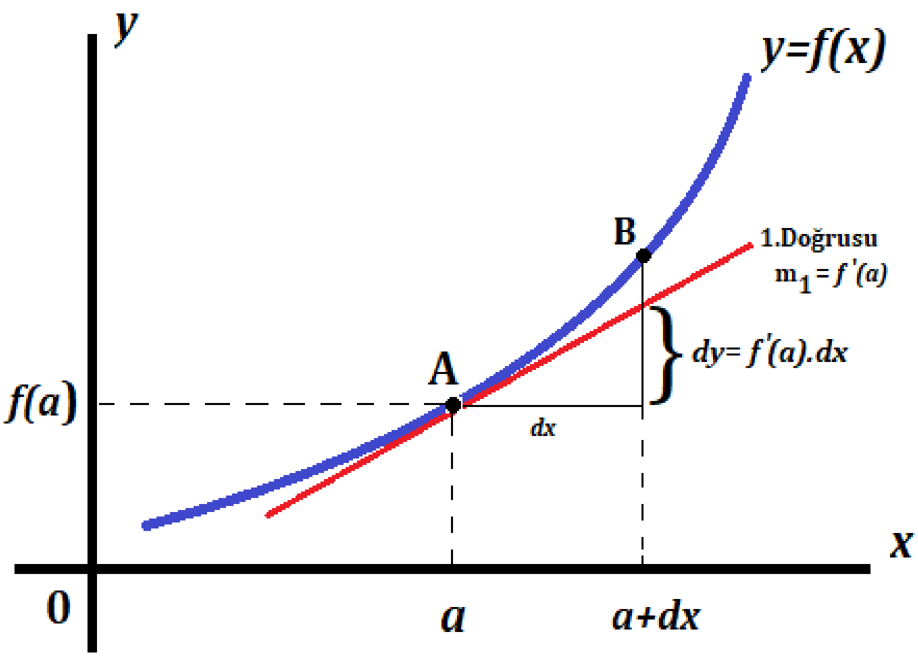
13.1 Diferansiyel Kavramı

Aşağıda verilen grafikte görüldüğü gbi herhangi bir **A** noktasının koordinatları $(a, f(a))$'dır. Bu noktadan sağa doğru x, dx kadar artar ise **B** noktasının apsisi $(x + dx)$ elde edilmiş olur. B noktasının koordinatları $[a + dx, f(a + dx)]$ olacaktır.

Eğer verilen $f(x)$ fonksiyonuna tam **A** noktasında bir teğet çizilecek olur ise, bu çizilen teğetin eğimi $f\,'(a)$ olur. Bu eğim kullanılarak fonksiyonun **A** noktasındaki diferansiyeli (dy) bulunması istenirse;

$$dy = m.dx = f\,'(a).dx$$
$$dy = f\,'(a).dx$$

İşte buradaki dy'ye, $x = a$ noktasında fonksiyonun diferansiyeli denir.



Şekil 13.1: Diferansiyel Kavramının Gösterimi

$f: R \to R$ türevi alınabilen bir fonksiyon olsun. x'in değerindeki değişimi Δx, buna karşılık gelen y'deki değişimi dy ile gösterelim. x'in diferansiyeli $dx = \Delta x$ olmak üzere, y'nin diferansiyeli;

$$dy = f\,'(x).dx$$

olur. Bir fonksiyonun x noktasındaki türevi ile dx'in çarpımı (x'in diferansiyeli) çarpımı bu fonksiyonun diferansiyeline eşittir.

$y = f(x)$ fonksiyonunun diferansiyeli $dy = f\,'(x).dx$ olduğu için türev alma kuralları difersnsiyel için de geçerlidir.

Diferansiyelin türevden farkı:

$$y = f(x)$$
$$\frac{dy}{dx} = f\,'(x) \qquad \text{(Türev)}$$
$$dy = f\,'(x).dx \qquad \text{(Diferansiyel)}$$

Bir diğer ifade ile dy diferansiyel, dy/dx ise türeve eşittir.

A noktasından **B** noktasına bir kiriş çizilecek olur ise bu kirişin eğimi;

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + dx) - f(a)}{dx}$$

olur .

Dikkat edilecek olursa, bu çizilen **AB** doğrusunun eğimi ile $x = a$ noktasında fonksiyona çizilen teğet doğrunun eğimi ile aynı değildir. Eğer dx miktarı küçültülerek sıfıra yaklaştırılmaya çalışıldıkça **AB** doğrusunun eğimi ile teğetin eğimi birbirine yaklaşacaktır. İşte bu durumda $\Delta y \cong dy$ olacaktır. Dolayısıyla herhangi bir fonksiyonun belli bir noktada alacağı değer diferansiyel yaklaşımı ile yaklaşık olarak bulunabilir.

Örnek:

$$y = f(x) = x^2 + 3x$$

fonksiyonu verilmiş olsun. Bu fonksiyonun diferansiyeli;

$$dy = f\,'(x).dx$$
$$dy = (x^2 + 3x)'.dx$$

olur. Bu da;

$$dy = (2x + 3)dx$$

eşittir.

Örnek:

$y = \sqrt{x}$ fonksiyonunun $x = 625$ için diferansiyelini bulunuz.

Çözüm:

$$y = \sqrt{x}$$
$$dy = f\,'(x).dx$$
$$dy = (\sqrt{x})'.dx$$
$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

olur.

$x = 625$ için;

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{625}}\,dx$$
$$dy = \frac{1}{2.25}\,dx$$
$$dy = \frac{1}{50}\,dx$$
$$dy = 0{,}02\,dx$$

olur. Fonksiyonun $x = 625$ için türevi veya $x = 625$ apsisine karşılık gelen noktada fonksiyona çizilen teğetin eğimi sorulsa idi;

$$\frac{dy}{dx} = f\,'(x) = 0{,}02$$

olarak bulunmuş olurdu.

Örnek:

$\sqrt{627}$ 'nin alacağı değeri diferansiyel yardımı ile yaklaşık olarak bulunuz.

Çözüm:

Bu soruda kullanılacak fonksiyon $y = f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonudur. Biliyoruz ki 625 sayısının karekökü 25'tir.

$$y = f(x) = \sqrt{x}$$
$$627 = 625 + 2 = x + dx$$

Buradan;
$x = 625$
$dx = 2$

$$dy = f\,'(x).dx$$

$f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun türevi; $f\,'(x) = 1/2\sqrt{x}$ olduğundan;

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$
$$f(627) = f(625 + 2) = f(x + dx)$$
$$f(x + dx) \cong f(x) + dy$$
$$f(x + dx) \cong f(x) + f\,'(x).dx$$

Buaradaki $f\,'(x).dx$ ifadesi dy'ye eşit olup diferansiyel kavramına karşılık gelir. Diferansiyel x'deki değişime karşılık gelen y'deki değişimdir.

$$f(627) \cong \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.dx$$
$$f(627) \cong \sqrt{625} + \frac{1}{2\sqrt{625}}.2$$
$$\sqrt{627} \cong 25 + 0{,}02.2$$
$$\sqrt{627} \cong 25{,}04$$

şeklinde yaklaşık olarak bulunur. Hesap makinesi ile $\sqrt{627}$ değeri 25,039968.. biçiminde devam eden bir irrasyonel sayı olduğu görülebilir. Burada dx değeri ne kadar küçük tutulursa diferansiyel yaklaşımı kullanılarak daha doğru sonuca ulaşılabilir.

Örnek:

log 1001 sayısını diferansiyel yardımı ile yaklaşık olarak bulunuz.

Çözüm:

Bu soruda kullanılacak fonksiyon $y = f(x) = \log x$ fonksiyonudur. Biliyoruz ki 1000 sayısının logaritması 3'tür.

$$y = f(x) = \log x$$
$$1001 = 1000 + 1 = x + dx$$

Buradan;
$x = 1000$
$dx = 1$

$$dy = f\,'(x).dx$$

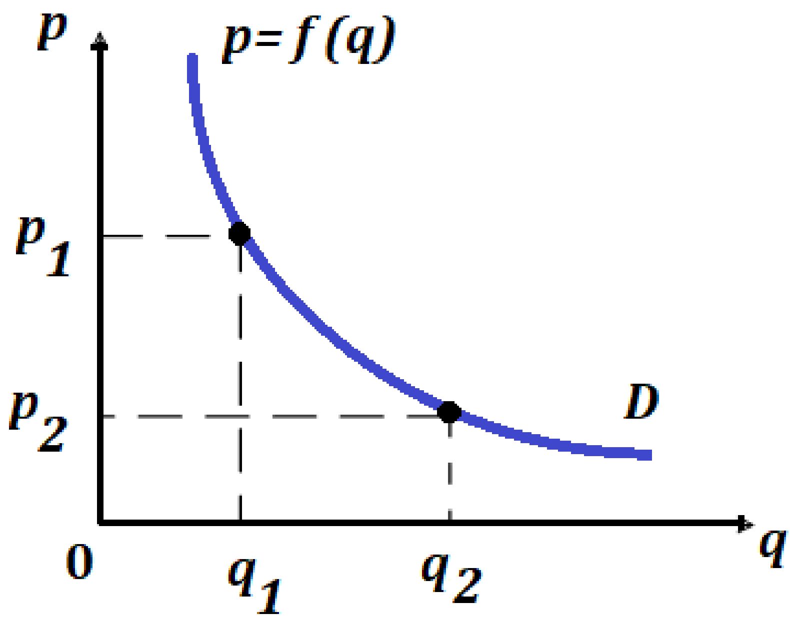
$f(x) = \log x$ fonksiyonunun türevi; $f\,'(x) = 1/x$ olduğundan;

$$dy = \frac{1}{x}\,dx$$
$$f(1001) = f(1000 + 1) = f(x + dx)$$
$$f(x + dx) \cong f(x) + dy$$
$$f(x + dx) \cong f(x) + f\,'(x).dx$$
$$f(x + dx) \cong \log x + \frac{1}{x}.dx$$

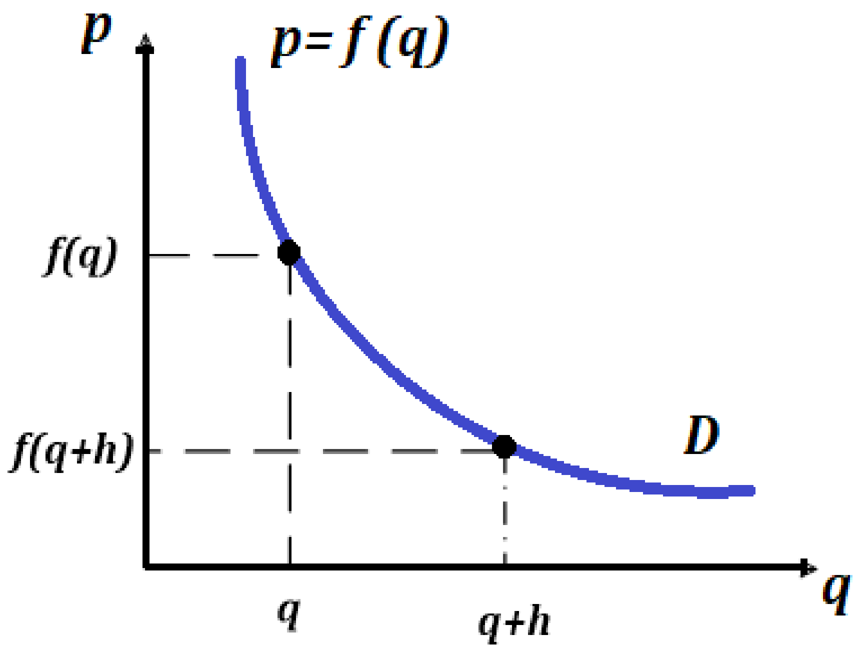
$$f(1001) \cong \log 1000 + \frac{1}{1000}.1$$
$$\log 1001 \cong 3 + 0{,}001.1$$
$$\log 1001 \cong 3{,}001$$
şeklinde yaklaşık olarak bulunur. Hesap makinesi ile $\log 1001$ değeri 3,000434.. biçiminde devam eden bir irrasyonel sayı olduğu görülebilir. Burada dx değeri ne kadar küçük tutulursa diferansiyel yaklaşımı kullanılarak daha doğru sonuca ulaşılabilir.

13.2 Talep Esnekliği (Elastikıyeti)

Talep esnekliği bir ürününü belirlenen fiyatı ile, ürüne olan talep arasındaki ilişkiyi göstermektedir. Bir ürün için talep fonksiyonu çok alıcılı çok satıcılı sistemlerde genellikle negatif eğimli yani genellikle azalan eğri ya da doğrular olur. İktisatta; talepteki yüzde değişimin ürünün fiyatındaki yüzde değişimine oranı elastikiyet (esneklik) olarak tanımlanır. Ürünün ikameleri az sayıda ise, esneklik genellikle düşük olur. Örneğin ekmeğin fiyatının artması yenen yani talep edilen ekmek miktarını çok değiştirmez. Ancak cep telefonlarının alternatif model ve markaları çok sayıda olduğu için, fiyattaki artış genellikle talebin düşüşüne sebep olur. Elastikiyeti matematiksel olarak aşağıdaki adımlarla belirlenir. Belirli bir ürün için oluşan talep fonksiyonu için belirli bir noktada elastikiyet hesaplanmak istendiğinde, talebin nokta elastikiyeti hesaplanmış olur.



Şekil 13.2: Ters Talep fonksiyonu D'nin grafiği



Şekil 13.3: Ters Talep fonksiyonu D'nin grafiği

$$\text{Elastikiyet (Esneklik)} = \boldsymbol{\eta} = \frac{\text{Talepteki yüzde değişim}}{\text{Fiyattaki yüzde değişim}}$$

$$\text{Esneklik} = \boldsymbol{\eta} = \frac{\frac{q_2 - q_1}{q_1} \cdot 100}{\frac{p_2 - p_1}{p_1} \cdot 100}$$

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{\frac{q_2 - q_1}{q_1}}{\frac{p_2 - p_1}{p_1}}$$

p_2 yerine $f(q+h)$ ve p_1 yerine $f(q)$; q_2 yerine $(q+h)$ ve q_1 yerine (q) konursa;

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{\frac{q+h-q}{q}}{\frac{f(q+h)-f(q)}{f(q)}}$$

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{\frac{h}{q}}{\frac{f(q+h)-f(q)}{f(q)}}$$

Payda daki $p = f(q)$ yerine yazılırsa,

$$\eta = \frac{\frac{h}{q}}{\frac{f(q+h)-f(q)}{p}}$$

h ile p'nin yeri değiştirilirse;

$$\eta = \frac{h}{q} \cdot \frac{p}{f(q+h)-f(q)} = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{f(q+h)-f(q)}{h}}$$

$h \to 0$ yaklaştırılıp limit değerine bakılırsa;

$$\lim_{h\to 0} \eta = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{p}{q}}{\frac{f(q+h)-f(q)}{h}}$$

$$\lim_{h\to 0} \eta = \frac{\frac{p}{q}}{\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(q+h)-f(q)}{h}}$$

Payda p'nin q'ya göre türevinin limit tanımından başka bir şey değildir.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(q+h)-f(q)}{h} = \frac{dp}{dq}$$

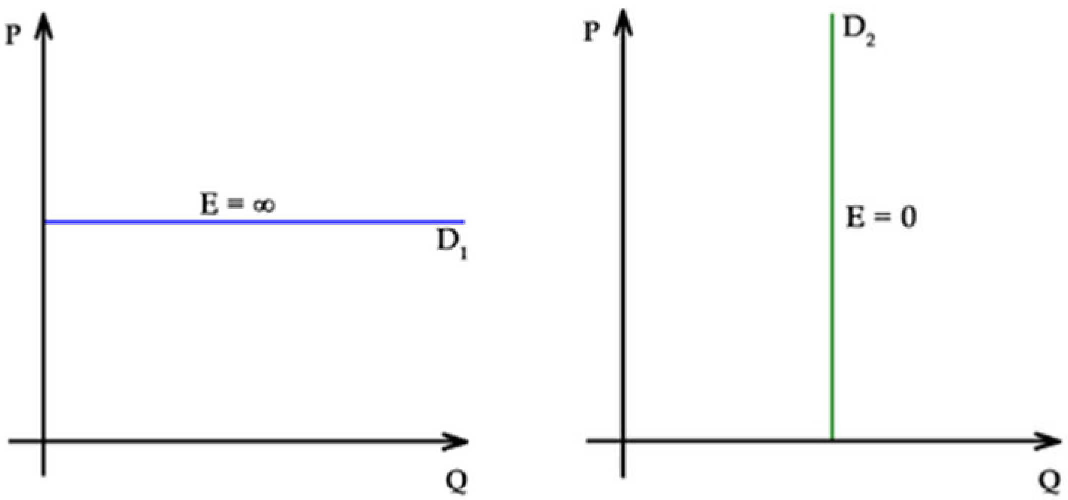
$$E = \eta = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{dp}{dq}}$$

$$Elastikıyet = Esneklik = E = \eta = \left| \frac{\frac{p}{q}}{\frac{dp}{dq}} \right| = \left| \frac{\frac{p}{q}}{p'(q)} \right| = \left| \frac{p}{q} . \frac{\mathrm{d}q}{dp} \right|$$

$E = \eta$; Talebin nokta elastikıyetini gösterir. Talep fonksiyonu ve esnekliğin bulunması istenen noktada 3 farklı durumu ortaya çıkabilir. Esneklik = [(p bölü q)×(q'nun p'ye göre türevi)]

- $|\,\eta\,| > 1$; Elastik (esnek)
- $|\,\eta\,| = 1$; Birim elastik (birim esnek)
- $|\,\eta\,| < 1$; Esnek değil (inelastik)

Aşağıda verilen talep farazi talep fonksiyonları (D_1ve D_2) için esnekliğin sonsuz ve sıfır olduğu durumlar görülmektedir.



Şekil 13.4: Talep fonksiyonu D'nin özel halleri

Örnek:

Bir ürün için talep fonksiyonu ($\boldsymbol{D}$),

$$p = \frac{104}{q+11} + 100$$

ve arz fonksiyonu ($\boldsymbol{S}$);

$$q = \left[\frac{p-100}{4}\right]$$

olarak belirlenmiştir. Talebin $q = 41$ birim olduğu durumda talebin nokta elastikiyetini bulunuz.

Çözüm:

$$\eta = \left| \frac{\frac{p}{q}}{\frac{dp}{dq}} \right| = \left| \frac{p}{q} . \frac{dq}{dp} \right|$$

$q = 41$ için $p = ?$

$q = 41$ aşağıdaki gibi talep fonksiyonunda yerine konarak p bulunur.

$$p = f(q = 41) = \frac{104}{41 + 11} + 100 = \frac{104}{52} + 100 = 102$$

$$\frac{dq}{dp} = \frac{0.(p-100) - 1.104}{(p-100)^2} \qquad (\boldsymbol{D} \text{ için; } q'\text{nun } p'\text{ye göre türevi})$$

$$\frac{dq}{dp} = \frac{-104}{(102-100)^2} = \frac{-104}{4} = -25{,}5$$

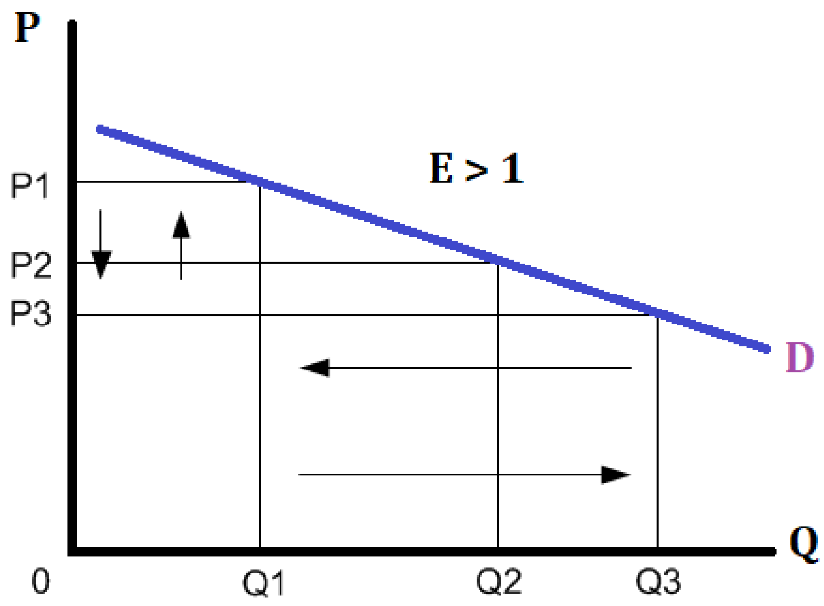
$$\eta = \left| \frac{p}{q} . \frac{dq}{dp} \right| =$$

$$\eta = \left| \frac{102}{41} . -25{,}5 \right|$$

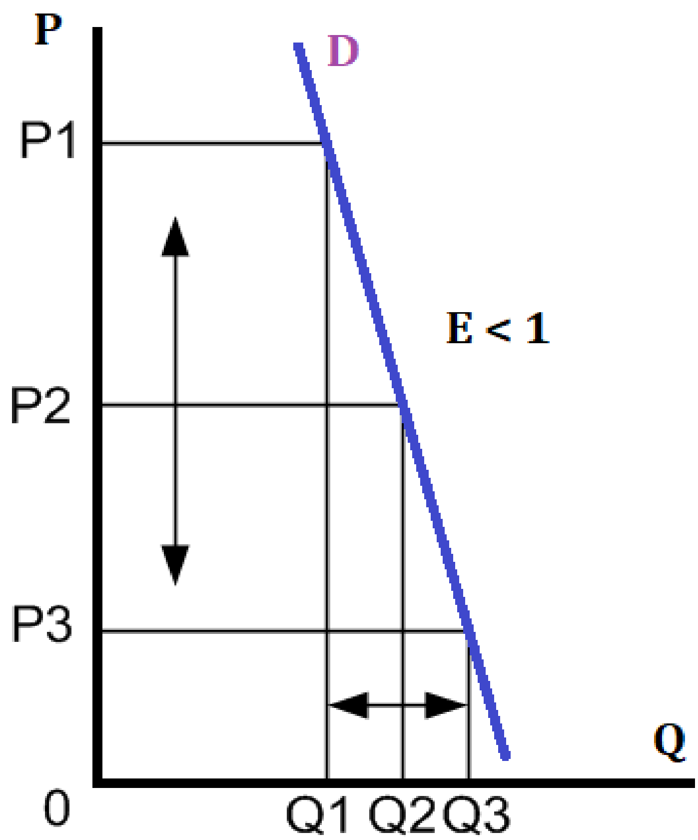
$$\eta = |-63{,}44| = 63{,}44 > 1$$

$\eta > 1$ olduğu için, talep $q = 41$ noktası (apsisi) için elastiktir. Talebin nokta elastikıyeti araştırıldığı için arz fonksiyonu çözümde hiç kullanılmadı.

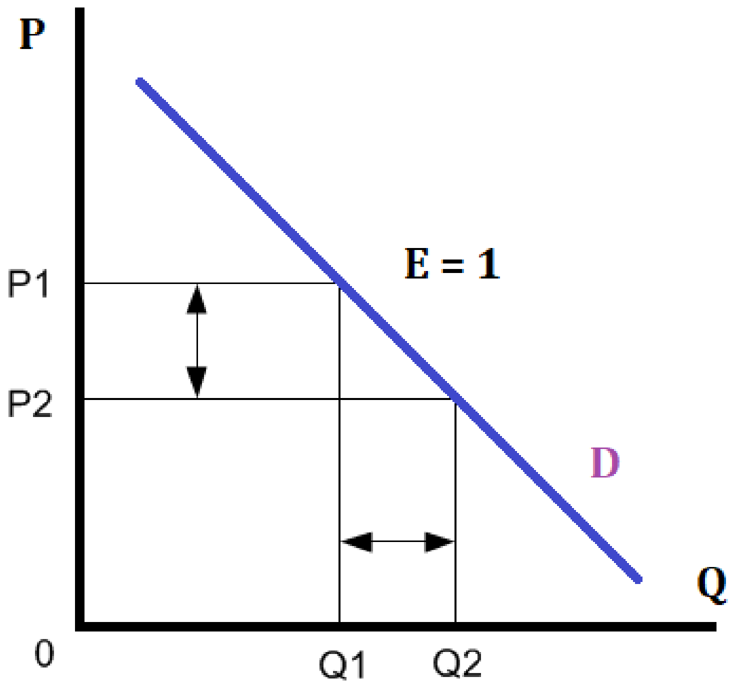
Aşağıda verilen talep fonksiyonlarında fiyattaki yüzde değişimlerinin talepte yarattığı yüzde değişimlerin üç farklı durumu grafik olarak gösterilmektedir. Birincisinde fiyatta küçük yüzde değişimlerinde talep fazlaca değim göstermiş (esnek, $E > 1$), ikincisinde fiyattaki büyük yüzde değişimler talepte küçük yüzde değişime sebep olmuş (esnek değil, $E < 1$), üçüncüsünde ise fiyat ile miktar değişim yüzdeleri birbirinin aynı kalmıştır (Birim esnek, $E = 1$).



Şekil 13.5: Esnekliğin büyük olması durumu E > 1



Şekil 13.6: Esnekliğin küçük olması durumu E < 1



Şekil 13.7: Esnekliğin 1 olması durumu E = 1

Örnek:

Bir ürünün fiyatı 7 TL den 6 TL ye düştüğünde o ürüne olan talep 1000’den 2000 Adete çıkmış ise talebin fiyat esnekliği nedir?

Çözüm:

Esneklik, Ürünün talebindeki %1 lik değişimin fiyattaki % değişime oranı.

$$\text{Elastikiyet (Esneklik)} = \boldsymbol{\eta} = \frac{\text{Talepteki yüzde değişim}}{\text{Fiyattaki yüzde değişim}}$$

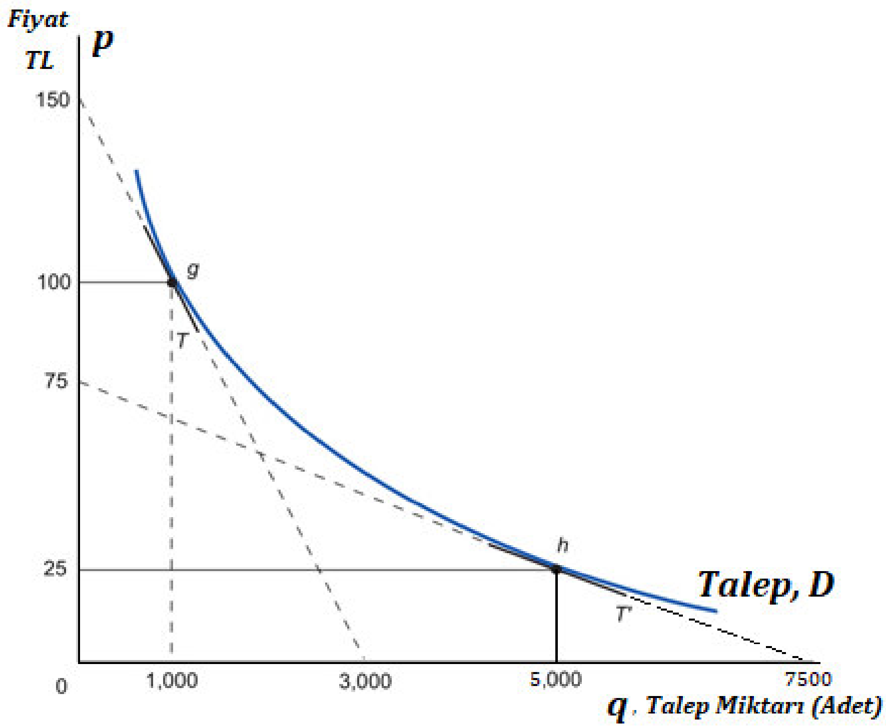
$$\text{Esneklik} = \boldsymbol{\eta} = \frac{\frac{q_2 - q_1}{q_1} \cdot 100}{\frac{p_2 - p_1}{p_1} \cdot 100}$$

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{\frac{q_2 - q_1}{q_1}}{\frac{p_2 - p_1}{p_1}}$$

$$\eta = \left| \frac{\frac{2000 - 1000}{1000} . 100}{\frac{6 - 7}{7} . 100} \right| = \left| \frac{\frac{1000}{1000}}{\frac{6 - 7}{7}} \right|$$

$\eta = \left| \frac{7}{-1} \right| = |-7| = 7$ $\eta > 1$; Esneklik birden büyük çıktığı için talep bu noktada esnektir.

Örnek:



Yukarıda verilen talep fonksiyonu için g ve h noktalarında talebin nokta elastikıyetlerini bulunuz.

Çözüm:

g noktası = $(q, p) = (1000, 100)$

h noktası = $(q, p) = (5000, 25)$

a) g noktası için esneklik:

$$\boldsymbol{\eta} = \left|\frac{p}{q} \div \frac{dp}{dq}\right| = \left|\frac{100}{1000} \div \frac{-150}{3000}\right| = 2$$

$\frac{dp}{dq}$ (Fonksiyona g noktasında çizilen teğetin eğimi)

$E_g = 2 > 1$; Talep g noktasında esnektir.

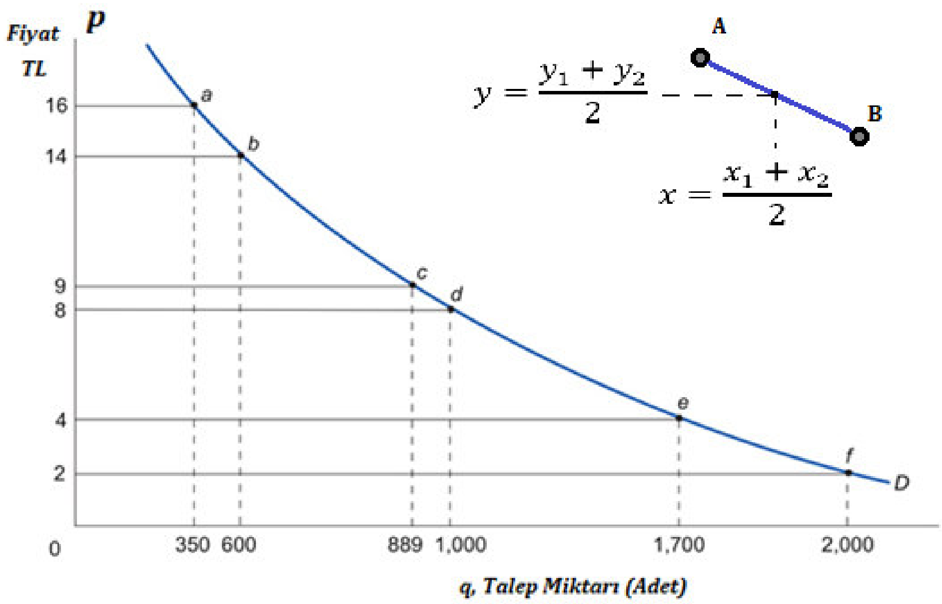
b) h noktası için esneklik:

$$\boldsymbol{\eta} = \left|\frac{p}{q} \div \frac{dp}{dq}\right| = \left|\frac{25}{5000} \div \frac{-75}{7500}\right| = 0{,}5$$

$\frac{dp}{dq}$ (Fonksiyona h noktasında çizilen teğetin eğimi)

$E_h = 0{,}5 < 1$; Talep h noktasında esnek değil.

Örnek:



Yukarıda verilen D talep fonksiyonu için a, b noktalarından, c, d noktalarından ve e, f noktalarından geçen doğrusal fonksiyonları belirleyerek, tam orta noktalarında talep esnekliklerini hesaplayınız. Nokta aralıklarında talebi doğrusallaştırınız.

a) a, b noktalarında geçen doğrunun denklemi;

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 14}{16 - 14} = \frac{x - 600}{350 - 600}$$

$$\frac{y - 14}{2} = \frac{x - 600}{-250}$$

$$y - 14 = \frac{x - 600}{-125}$$

$$y = \frac{-x}{125} + \frac{600}{125} + 14$$

$$y = \frac{-x}{125} + 18{,}8$$

a, b noktalarından geçen doğrusal fonksiyonun eğimi $-1/125$'tir.

$$\boldsymbol{\eta} = \left|\frac{p}{q} \div \frac{dp}{dq}\right| = \left|\frac{15}{425} \div \frac{-1}{125}\right| = 4{,}41$$

$E_{a,b} = 4{,}41 > 1$; Talep bu aralıkta esnek.

b) c, d noktalarında geçen doğrunun denklemi;

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 8}{9 - 8} = \frac{x - 1000}{889 - 1000}$$

$$\frac{y - 8}{1} = \frac{x - 1000}{-111}$$

$$y - 8 = \frac{x - 1000}{-111}$$
$$y = \frac{-x}{111} + \frac{1000}{111} + 8$$
$$y = \frac{-x}{111} + 17$$
c, d noktalarından geçen doğrusal fonksiyonun eğimi $-1/111$'tir.
$$\boldsymbol{\eta} = \left|\frac{p}{q} \div \frac{dp}{dq}\right| = \left|\frac{8{,}5}{944{,}5} \div \frac{-1}{111}\right| \cong 1$$
$E_{c,d} \cong 1$; Talep bu aralıkta birim esnek.

c) e, f noktalarında geçen doğrunun denklemi;
$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 4}{4 - 2} = \frac{x - 2000}{1700 - 2000}$$
$$\frac{y - 4}{2} = \frac{x - 2000}{-300}$$
$$y - 4 = \frac{x - 2000}{-150}$$
$$y = \frac{-x}{150} + \frac{2000}{150} + 4$$
$$y = \frac{-x}{150} + 17{,}33$$

e, f noktalarından geçen doğrusal fonksiyonun eğimi $-1/150$'tir.
$$\boldsymbol{\eta} = \left|\frac{p}{q} \div \frac{dp}{dq}\right| = \left|\frac{3}{1850} \div \frac{-1}{150}\right| \cong 0{,}243$$
$E_{c,d} = 0{,}243 < 1$; Talep bu aralıkta esnek değil
p ve q değerleri üç örnekte iki noktadan eşit uzaklıktaki tam orta noktaları seçilmiştir. Örneğin a şıkkında
$$p = \frac{16 + 14}{2} = 15 \text{ TL} \quad ve \quad q = \frac{600 + 350}{2} = 425 \text{ Adet}$$
olarak elde edilmiştir.

Uygulama

$\sqrt[3]{124}$ sayısını diferansiyel yardımı ile yaklaşık olarak bulunuz.

Çözüm:

Bu soruda kullanılacak fonksiyon $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$ fonksiyonudur. Biliyoruz ki 125 sayısının küp kökü 5'tir.

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x}$$
$$f(124) = f(125 + (-1)) = f(x + dx)$$

Buradan;

$x = 125 \quad dx = -1$

$$dy = f'(x).dx$$

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ fonksiyonunun türevi;

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

olduğundan;

$$dy = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,dx$$
$$f(x + dx) \cong f(x) + dy$$
$$f(x + dx) \cong f(x) + f'(x).dx$$
$$f(x + dx) \cong \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.dx$$
$$f(x + dx) \cong \sqrt[3]{125} - \frac{1}{3\sqrt[3]{125^2}}.(-1)$$
$$f(x + dx) \cong \sqrt[3]{125} - \frac{1}{3.25}.(-1)$$
$$\sqrt[3]{124} \cong 5 + 0{,}013333.(-1)$$
$$\sqrt[3]{124} \cong 4{,}9866$$

şeklinde yaklaşık olarak bulunur. Hesap makinesi ile $\sqrt[3]{124}$ değeri 4,9866309.. biçiminde devam eden bir irrasyonel sayı olduğu görülebilir. Burada dx değeri ne kadar küçük tutulursa diferansiyel yaklaşımı kullanılarak daha doğru sonuca ulaşılabilir.

Uygulama Soruları

1) Bir ürünün fiyatı 7 TL'den 6 TL'ye düştüğünde o ürüne olan talep 1000'den 2000 adede çıkmış ise talebin fiyat esnekliği nedir?

Çözüm:

$$\eta = \left| \frac{\frac{2000-1000}{1000}.100}{\frac{6-7}{7}.100} \right| = \lceil -7 \rceil$$

$$\eta = 7$$

Ürünün talebindeki %1'lik değişimin fiyattaki % değişime oranı.

2) $\sqrt[3]{217}$ sayısını diferansiyel yardımı ile yaklaşık olarak bulunuz.

Çözüm:

Bu soruda kullanılacak fonksiyon $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$ fonksiyonudur. Biliyoruz ki 216 sayısının küp kökü 6'tir.

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$f(217) = f(216+1) = f(x+dx)$$

Buradan;

$x = 216 \quad dx = 1$

$$dy = f\,'(x).dx$$

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ fonksiyonunun türevi;

$$f\,'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

olduğundan;

$$dy = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,dx$$

$$f(x+dx) \cong f(x) + dy$$

$$f(x+dx) \cong f(x) + f\,'(x).dx$$

$$f(x+dx) \cong \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.dx$$

$$f(x+dx) \cong \sqrt[3]{216} - \frac{1}{3\sqrt[3]{216^2}}.(1)$$

$$f(x+dx) \cong \sqrt[3]{125} - \frac{1}{3.36}.(1)$$

$$\sqrt[3]{217} \cong 6 + 0{,}00926$$

$$\sqrt[3]{217} \cong 6{,}00926$$

şeklinde yaklaşık olarak bulunur. Hesap makinesi ile $\sqrt[3]{217}$ değeri 4,00924500... biçiminde devam eden bir irrasyonel sayı olduğu görülebilir. Burada dx değeri ne kadar küçük tutulursa diferansiyel yaklaşımı kullanılarak daha doğru sonuca ulaşılabilir.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde türev konusunun işletmecilik ve iktisat uygulamalarından diferansiyel yaklaşımı, doğrusallaştırma ve talep esnekliği anlatılmıştır. Verilen bir talep fonksiyonunun fiyata göre esneklik durumları belirlenmiş ve ardından nokta elastikıyeti belirlenmiş ve aldığı değere göre esnek olduğuna veya esnek olmadığına karar verilmiştir.

Bölüm Soruları

1) Bir ürünün talep fonksiyonu $p = 500 - 5q - q^2$ olarak belirlenmiştir. p fiyat q üretim (satış) miktarını göstermekte ise, $q = 5$ için talebin nokta esnekliği mutlak değerini almadan önce kaç olur?

a) 4

b) 1

c) $-1{,}5$

d) – 1

e) -6

2) Bir ürüne ait talep fonksiyonu $q = 1000 - 50p^2$ şeklinde belirlendiğine göre. Talep elastikiyetini $p = 3$ için bulunuz.

a) 2,03

b) 1,64

c) -1

d) 1

e) 0,53

3) Bir ürünün satışından elde edilen toplam gelir fonksiyonu $R(q) = 400q - 4q^2$ olsun. Ürün sayısının $q = 20$'den $q = 22$'ye değişmesi durumunda gelirdeki yaklaşık değişmeyi diferansiyel kullanarak bulunuz.

a) 440

b) 460

c) 480

d) 500

e) 520

4) $p = 400 - q^2$ olarak verilen talep fonksiyonu q'nun hangi değeri için birim elastiktir?

a) $q = 20$

b) $q = 21$

c) $q = 22$

d) $q = 24$

e) $q = 25$

5) $y = f(x) = \ln(x^2 + 3)$ fonksiyonunun diferansiyeli (dy) aşağıdakilerden hangisidir?

a) $dy = 2xdx$

b) $dy = (x^2 + 3)2xdx$

c) $dy = (x^2 + 3)dx$

d) $dy = \frac{2x}{(x^2+3)} \cdot (2x)dx$

e) $dy = \frac{2x}{(x^2+3)}dx$

6) Talep denkleminin $p = 20 - 2q$ ve arz denkleminin $p = 5 + q$ olarak verildiği durumda denge miktarı kaçtır?
a) 3
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

7) Elmanın talep eğrisi $q = 540 - 12p$ ve elma talebinin nokta fiyat esnekliği de $\eta = -2$ çıkmış ise fiyat (p) kaç TL'dir?
a) 20
b) 24
c) 27
d) 30
e) 35

8) $q = 64 - p$ talep fonksiyonu için p'nin hangi değeri için talep elastiktir?
a) $p > 32$
b) $p < 32$
c) $p > 4$
d) $p < 4$
e) $p = 0$

9) Ülke ekonomisinde piyasaya konu olan bir malın piyasa talep fonksiyonu

$$q_D = 320 - 30p$$

ve aynı mala ait piyasa arz fonksiyonu ise

$$q_S = 20 + 20p$$

dir. Denge fiyatı ne kadar olur?
a) 5 b) 6 c) 7,5 d) 10 e) 15

10) Hesap makinesi ile $\sqrt[3]{217}$ ile bulduğunuzda ekranda virgülden sonraki üç hanesinde hangi sayı görülür.
a) 009
b) 008
c) 092
d) 004
e) 094

Cevaplar

1) e, 2) b, 3) c, 4) a, 5) e, 6) b, 7) d, 8) a, 9) b, 10) a

14. TÜREVİN İKTİSADİ UYGULAMALARI

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

14.1. Marjinal Kavramı
14.2. Marjinal Gelir
14.3. Marjinal Maliyet
14.4. Marjinal Kar
14.5. Marjinal Tüketim Eğilimi

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1) Marjinal kavramını tanımlayınız?

2) Marjinal gelir nedir?

3) Marjinal maliyet nedir?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	**Kazanım**	**Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği**
Marjinal Gelir	Gelir fonksiyonunda marjinal gelir fonksiyonunu elde edebilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, tekrar yaparak
Marjinal Maliyet	Maliyet fonksiyonunda marjinal maliyet fonksiyonunu elde edebilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, tekrar yaparak
Marjinal Tüketim Eğilimi	Marjinal Tüketim Eğilimini anlamak	Okuyarak, fikir yürüterek, tekrar yaparak

Anahtar Kavramlar

- Marjinal Kavramı
- Marjinal Maliyet
- Marjinal Gelir
- Marjinal Tüketim Eğilimi

Giriş

Daha önceki bölümlerde bir firmada üretilen belli bir ürünün üretimi (satışı) için oluşan toplam maliyet (TC), toplam gelir (TR veya R) ve kar fonksiyonlarının (P) nasıl belirlendiği incelenmişti.

$$R(q) = p.q$$
$$TC(q) = VC + FC$$
$$TC(q) = c.q + FC$$

Bu arada toplam maliyet iki kısımdan oluşmakta idi. Birinci kısın toplam değişken maliyet (VC), ikinci kısım ise toplam sabit maliyet (FC) idi.
Kar ise toplam gelirden toplam maliyet çıkarılarak elde edilmekteydi.

$$P(q) = R(q) - TC(q)$$
$$P(q) = p.q - (c.q + FC)$$
$$P(q) = p.q - c.q - FC$$

Bu bölümde, türev konusunun işletme ve iktisat uygulaması olan marjinal gelir, marjinal maliyet, marjinal kar kavramları üzerinde durulacaktır.

Bu bölümde ayrıca belli bir tüketim fonksiyonu verildiğinde marjinal tüketim eğilimi nasıl bulunur konusu da açıklığa kavuşturulacaktır.

14.1 Marjinal Gelir ve Marjinal Maliyet Kavramları

Marjinal kavramı; genel olarak üretilen (satılan) her yeni ürünün gelir veya maliyeti ne kadar değiştirdiğini (arttırdığını veya azalttığını) belirtir. Marjinal ifadesi bir anlamda artı bir birim üretimin (satışın) gelire veya maliyete etkisidir denir. En sık kullanılan örnekler; marjinal fayda, marjinal tüketim, marjinal gelir veya marjinal maliyettir.

Aşağıdaki tabloda (Tablo 14.1) bir firmanın işçi sayısına bağlı olarak toplam üretim değerleri, marjinal üretim değerleri ve ortalama üretim değerleri verilmektedir.

Tablo ayrıntılı bir şekilde incelenirse, işçi sayısı birer birer arttıkça toplam üretimin eşit şekilde artış göstermediği açıkça görülmektedir. Hatta 5 işçiden sonraki işçi sayısındaki artış toplam üretimi arttırmadığı gibi toplam üretimin azalmasına sebep olmaktadır. Buradan da anlaşılmaktadır ki, işçi sayısındaki bir birimlik artış toplam üretimde farklı değerde artışlara (bazen de azalışlara) sebep olmaktadır. Toplam üretimdeki değişimin işçi sayısındaki değişmeye işgücünün marjinal verimliliği denir.

İşte ilave bir işçinin toplam üretime katkısı marjinal etki anlamına gelmektedir. Örneğin 2. işçinin toplam üretime katkısı (etkisi) $6 - 2 = 4$, 3. işçinin toplam üretime katkısı $12 - 6 = 6$, 6. işçinin toplam üretime katkısı ise $18 - 18 = 0$ olmaktadır. 7. işçinin de işe girmesiyle toplam üretim18'den 14'e düşerek; $14 - 18 = -4$; 4 birim azalma göstermişitr. Burada anlatılan ilave bir birimlik bağımsız değişkendeki artışın fonksiyonda ne kadarlık bir değişim meydana getirdiğinin açıklanmasından başka bir şey değildir. İşte bu etkiye (negatif veya pozitif katkı) marjinal kavramını tanımlar. Aynı tabloda ortalama üretimler de doğal olarak değişim göstermektedir. İşçi sayısı başlangıçta arttıkça ortalama üretim değerleri artış göstermiş ancak sonraki işçi sayıları için ortalama üretim azalmaya başlamıştır.

Tablo 14.1: İşçi sayısına bağlı olarak değişen üretim değerleri

İşçi Sayısı	**Toplam Üretim (Aylık)**	**Marjinal Üretim**	**Ortalama Üretim**
1	2	2	2
2	6	4	3
3	12	6	4
4	16	4	4
5	18	2	3.6
6	18	0	3
7	14	-4	2
8	8	-6	1

p, bir ürünün birim satış fiyatını, q ise belirli bir dönemde oluşan talebi (üretim, satış değeri), c o dönemde oluşan birim değişken maliyeti göstermek üzere;

Toplam gelir fonksiyonu;

$$TR(q) \text{ veya } R(q) = p.q$$

Toplam maliyet fonksiyonu;

$$TC(q) = VC + FC$$
$$TC(q) = c.q + FC$$

Bu arada toplam maliyet iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısın toplam değişken maliyet (VC), ikinci kısım ise toplam sabit maliyet (FC) tir.

Kar ise toplam gelirden toplam maliyet çıkarılarak elde edilmektedir.

$$P(q) = R(q) - TC(q)$$
$$P(q) = p.q - (c.q + FC)$$
$$P(q) = p.q - c.q - FC$$

$P > 0$ iken **kar**; $P = 0$ için Başabaş (**BBN**) veya Sıfır Kar Noktası (**SKN**), P<0 iken **zarar** durumunda olunur.

Örnek:

Bir atölyede sadece bir ürünün üretildiğini ve dönem sonuna kadar da üretilen bütün ürünlerin satıldığını varsayalım. Ürünün birim değişken maliyeti 7,5 TL ve satış fiyatı 15 TL ve o dönemde oluşan sabit maliyetler toplamı 15000 TL olduğu bilindiğine göre, o dönemde atölye için toplam gelir fonksiyonunu, toplam maliyet ve kar fonksiyonlarını elde ediniz. Başabaş noktasındaki üretim (satış) düzeyini belirleyiniz. Eğer o dönemde 3500 adet ürün üretilip satılır ise firmanın elde edeceği karı bulunuz.

Çözüm:

Toplam gelir fonksiyonu;

$$R(q) = p.q$$
$$R(q) = 15.q$$

Toplam gelir fonksiyonu doğrusal fonksiyon olup eğimi 15'tir. Her bir satış geliri 15 TL arttırmaktadır. Sabit terim (üretimden bağımsız gelir) olmadığı için orijinden başlayıp artan bir doğru olacaktır.

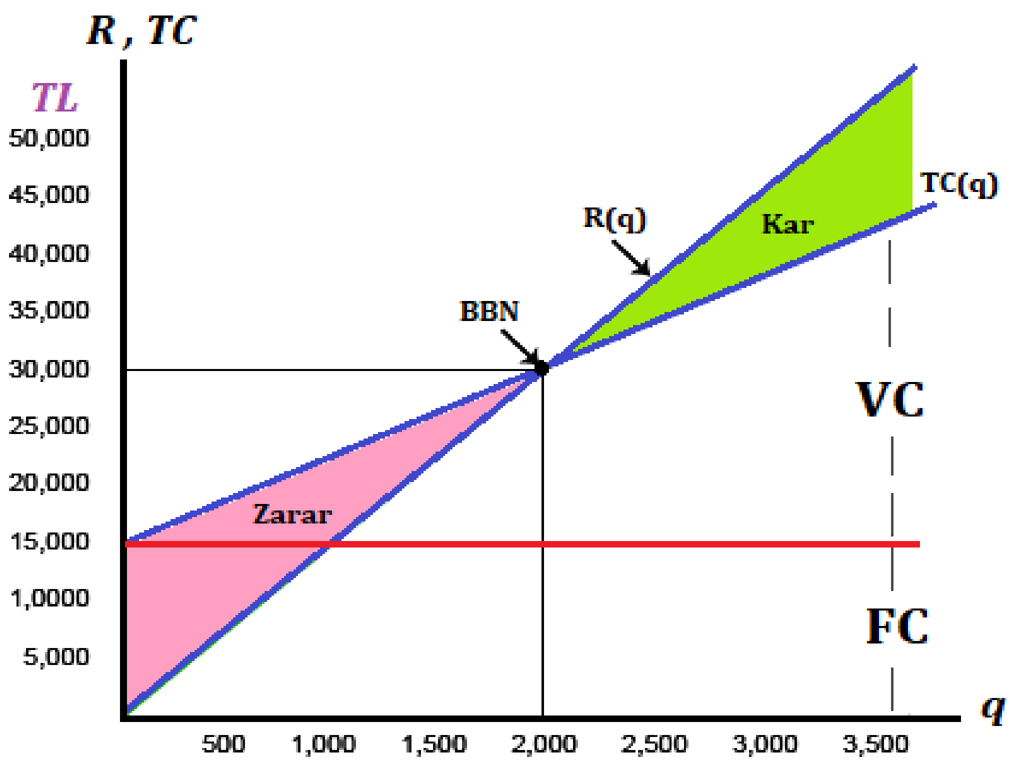
Toplam maliyet fonksiyonu;

$$TC(q) = VC + FC$$
$$TC(q) = c.q + FC$$
$$TC(q) = 7{,}5.q + 15000$$

Toplam maliyet fonksiyonu doğrusal fonksiyon olup eğimi 7,5'tir. Her bir üretim (satış) maliyeti 7,5 TL arttırmaktadır. Sabit maliyet (üretimden bağımsız maliyet) 15000 TL olarak verilmiştir. Toplam maliyet doğrusu da eğimi 15000'den başlayıp artarak giden bir doğru olacaktır.

Kar fonksiyonu ise toplam gelirden toplam maliyet çıkarılarak elde edilir.

$$P(q) = 15.q - 7{,}5.q - 15000$$



Şekil 14.2: Başabaş analizinin grafiksel gösterimi

Karın sıfır olduğu nokta yani başabaş noktası sorulduğuna göre;

BBN'de Kar $= \ P = 0$

$$0 = 15.q - 7{,}5.q - 15000$$
$$0 = 7{,}5.q - 15000$$
$$q = \frac{15000}{7{,}5}$$
$$q = 2000 \text{ Adet}$$

BBN, Başabaş noktasındaki üretim düzeyi $q = 2000$ adettir.

$q = 3500$ adet iken atölyenin elde edeceği kar;

$$P = 15.3500 - 7{,}5.3500 - 15000$$
$$P = 7{,}5.3500 - 15000 = 11250$$

$P\ (Kar) = 11250$ TL olacaktır.

14.2 Marjinal Gelir, Marjinal Maliyet Fonksiyonları

Marjinal geliri veya marjinal maliyeti belirleyebilmek için türevden yararlanılır. Toplam gelirin birinci türevi marjinal geliri, toplam maliyetin birinci türevi ise marjinal maliyeti vermektedir. Ortalama marjinal maliyet ise artı bir birimin ortalama maliyete etkisinin ne kadar olduğunu ortaya koyar.

$R(q)$ üretim seviyesine bağlı toplam gelir fonksiyonu ise,

Marjinal gelir;

$$MR(q) = \frac{dR(q)}{dq}$$
$$MR(q) \approx R(q\ +\ 1) - R(q)$$

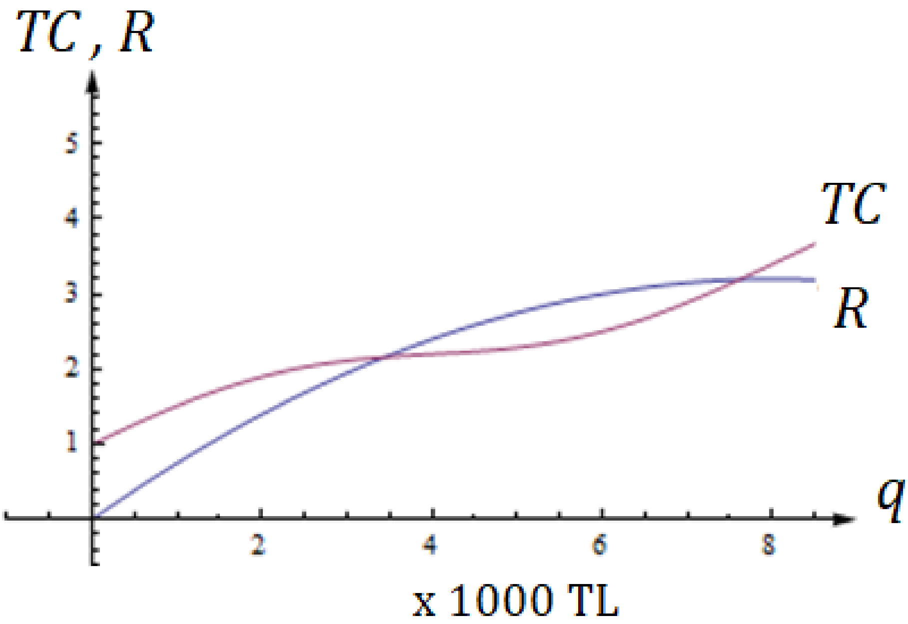
$TC(q)$ üretim seviyesine bağlı toplam maliyet fonksiyonu ise,
Marjinal maliyet;

$$MC(q) = \frac{dTC(q)}{dq}$$

$$MC(q) \approx TC(q + 1) - TC(q)$$

Bir üretime ilişkin **toplam gelir** ve **toplam maliyet** fonksiyonlarını bildiğimiz takdirde, **kârı** maksimum veya minimum yapan üretim seviyelerini bulmak istersek gelir fonksiyonundan maliyet fonksiyonunu çıkararak kâr fonksiyonu elde edilir.
Kâr;

$$P(q) = TR(q) - TC(q)$$



Kâr fonksiyonunun birinci türevi alınıp sıfıra eşitlenirse kârın maksimum veya minimum olduğu noktalar elde edilir.
Kârın türevi ise;

$$\frac{dP(q)}{dq} = \frac{dR(q)}{dq} - \frac{dTC(q)}{dq}$$

$$\frac{dP}{dq} = MR(q) - MC(q)$$

olacaktır. Marjinal gelirden marjinal maliyet çıkarılıp sıfıra eşitlendiği nokta ya da noktalarda kâr maksimum veya minimum olur.

$$P(q) = MR(q) - MC(q) = 0$$

$$MR(q) = MC(q)$$

Örnek:
Bir ürünün talep fonksiyonu;

$$p = f(q) = 1000/(q + 5)$$

olarak verildiğine göre $q = 45$ iken marjinal gelir nedir?
Çözüm:

Toplam Gelir = Talep Miktarı · Satış Fiyatı

$$(R = p.q\,, p = f(q))$$

$$R = p.q = f(q).q = \frac{1000}{q+5}.q = \frac{1000q}{q+5}$$
$$R'(q) = \frac{dR}{dq} = \frac{1000.(q+5) - 1000.q}{(q+5)^2}$$
$$R'(q = 45) = \frac{1000.(45+5) - 1000.45}{(45+5)^2}$$
$$R'(q = 45) = \frac{1000.50 - 1000.45}{(50)^2}$$
$$R'(q = 45) = \frac{5000}{2500} = 2$$
$$\frac{dR}{dq} = MR(q) = 2$$
olur.

14.3 Tüketim Fonksiyonu ve Marjinal Tüketim Eğilimi

Tüketim fonksiyonu, tüketim harcamaları ile millî gelir arasındaki ilişkiyi belirtir. Bir ekonomide millî gelir seviyesi yükseldikçe tüketim harcamaları da düzgün bir seyir takip ederek artmaktadır. Durum, tüketim şedülü adı verilen bir tablo yardımıyla gösterilebilir. Malın muhtemel fiyatları karşısında, o maldan satın almak isteyen alıcıların istedikleri mal miktarını ve mala olan talebin genel yapısını ve özelliklerini açıklayan kavramdır. Belirli bir mal ya da hizmetini öteki koşullar değişmemek üzere, çeşitli fiyat düzeylerindeki arz miktarlarını gösteren tablodur.
$$Y = C + S$$
$$C = f\,(Y)$$
Aşağıdaki tabloya göre millî gelir arttıkça, yoğaltım harcamaları da genişlemektedir. Yalnız burada dikkat edilecek husus, tüketim harcamalarındaki her yükselişin millî gelirdeki artışların sabit bir yüzdesi kadar olmasıdır. Tablodaki ilişki şöyle bir fonksiyon halinde yazılabilir:

Milli Gelir (Milyar TL)	Milli Gelirdeki Artış (Milyar TL)	Tüketim Harcamaları (Milyar TL)	Tüketim Harcamalarındaki Artış (Milyar TL)
100	-	90	-
110	10	97	7
120	10	104	7
130	10	111	7
140	10	118	7

$$C = 10 + 0{,}7 \cdot Y$$
Burada C, tüketim harcamalarını, Y ise milli geliri göstermektedir.

Bu fonksiyonel ilişkiden anlaşıldığına göre, adı geçen ekonomide millî gelir seviyesi sıfır dahi olsa 10 Milyar TL'lik tüketim harcaması yapılmaktadır. Ayrıca millî gelirdeki her artış, kendisinin %70 kadar bir tüketim harcamasına sebep olmaktadır. Bu değişmez 0,7 katsayısına marjinal tüketim eğilimi adı verilir. Öte yandan, her millî gelir seviyesinde yapılan toplam tüketim harcamalarının adı geçen milli gelir seviyelerine oranı değişmektedir. Bu orana da ortalama tüketim eğilimi denmektedir. Örneğin milli gelir 100 Milyar TL iken ortalama tüketim meyli $90/100 = 0.90$, 110 milyar T.L. iken $97/110 =$

0.88 ve 140 milyar iken $118/140 = 0.84$ olmaktadır. Tüketim fonksiyonu genel bir doğrusal ilişki halinde yazılabilir:

$$C = C_0 + c \cdot Y$$

Burada;

C, tüketim harcamalarını, C_0, otonom temel tüketimi, c, marjinal tüketim eğilimini, Y, millî geliri göstermektedir.

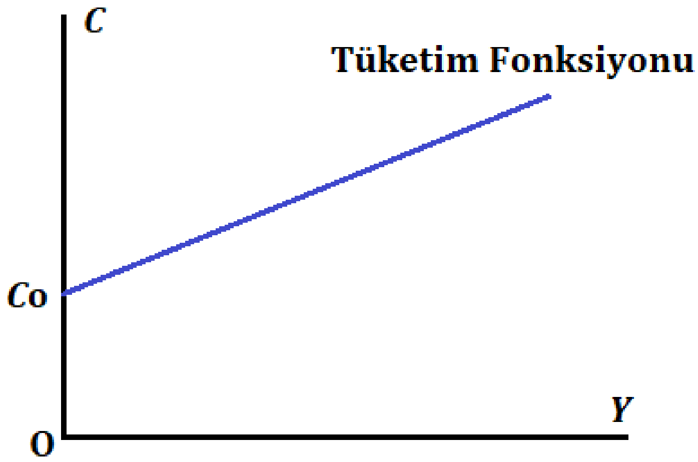
Tüketim fonksiyonunun millî gelire göre birinci türevi

$$\frac{dC}{dY}$$

tanım gereğince **marjinal tüketim eğilimi** yani c'ye eşit olmaktadır.

Tüketim fonksiyonu doğrusallaştırılarak geometrik olarak, düzlem dik koordinat sisteminde bir doğru ile gösterilebilir. Doğrunun eğimi, fonksiyonun birinci türevi olan c dir.

$$C = f(Y) = C_0 + c \cdot Y$$



Şekil 14.3: Doğrusal Tüketim Fonksiyonu

Yukarıdaki şekilde, yatay eksende milli gelir (Y), dikey eksende tüketim harcamaları (C) yer almaktadır. Fonksiyonu gösteren doğrunun dik ekseni kestiği noktanın ordinatı, otonom tüketim harcamalarını (C_0) belirtmektedir. Yani millî gelir sıfır olsa dahi, bahis konusu ekonomide OC_0 kadar temel tüketim harcaması yapılmaktadır. Otonom tüketim, gelir harcama modelinde, millî gelir ve faiz oranlarından bağımsız olarak yapılan tüketim, yatırım, hükümet harcaması ile dışalım ve dışsatım demektir.

Her zaman, belli bir gelir olmasa bile, mutlaka bir tüketim miktarı vardır. Yani tüketim gelirin bir fonksiyonudur. Net gelir arttıkça tüketim de artar ama daha az miktarda artar. Net gelirdeki zamanla tüketilecek artış oranı her zaman sabittir. Bu orana "tüketimin marjinal eğilimi (belirtisi)" ya da tüketim fonksiyonu eğimi denir.

Örnek:

Millî net gelir sıfır olduğunda, tüketim 80 milyar TL olmaktadır. Tüm ekonomi için tüketim; millî net gelire "her net gelir seviyesinde tüketim 10 milyar TL, ek olarak ayrıca %60 net gelirden oluşur" şeklinde doğrusal olarak bağlıdır. Buna göre bu doğrunun denklemini bulunuz, grafiğini çiziniz ve net gelir 300 miyar TL olduğunda toplam tüketim ne kadar olur?

Çözüm:

$$C = f(Y) = C_0 + c.Y$$

Temel tüketim = 80

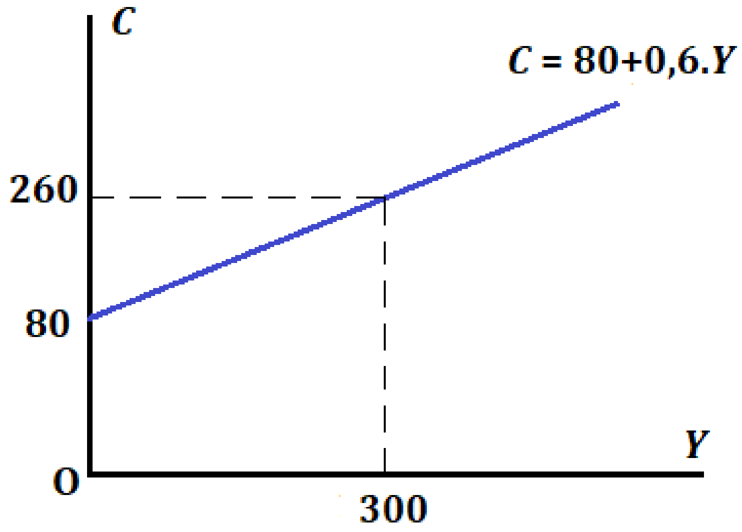
Tüketimin marjinal eğilimi = 0,6

$$C = f(Y) = 80 + 0{,}6.Y$$

Gelir 100 TL

$$C = f(Y) = 80 + 0{,}6.300$$
$$C = f(Y) = 80 + 180$$
$$C = f(Y) = 260 \text{ TL}$$

Burada, Net gelir 300 Milyar TL olur. Yani net gelir 300 milyar TL iken tüketim 260 Milyar TL olmaktadır. Kalan $300 - 260 = 40$ Milyar TL ise tasarrufa ayrılmaktadır.



Şekil 14.4: Tüketim Fonksiyonu Grafiği

Örnek 12-4:

toplam millî tüketim fonksiyonu $C = 5 + 0{,}6.Y + 0{,}4\sqrt{Y}$ tise;

a) Tasarruf fonksiyonunu bulunuz ve tüketim ve tasarruf fonksiyonlarının grafiğini çiziniz.

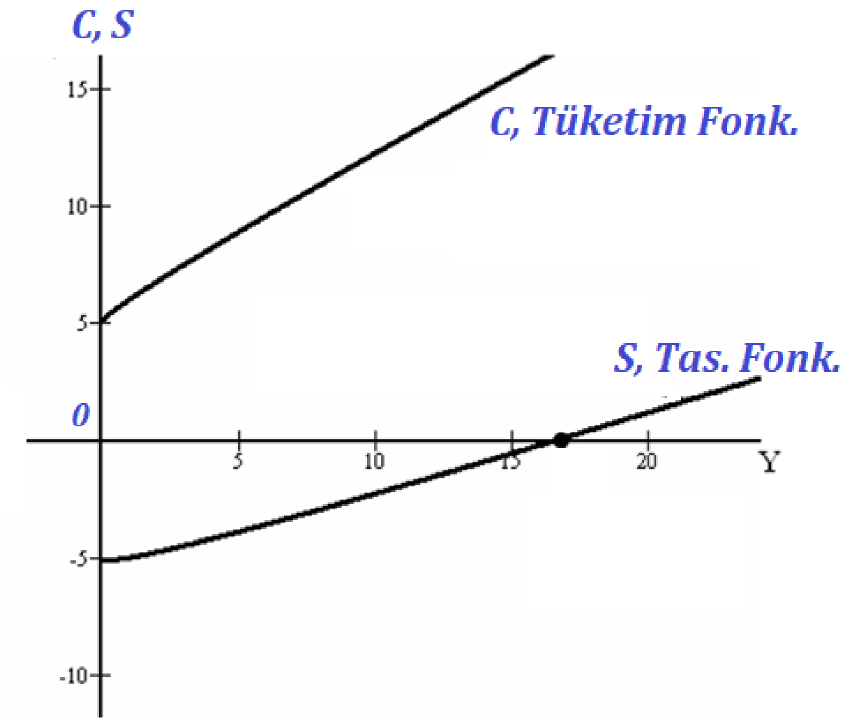
b) Marjinal Tüketim ve Marjinal Tasarruf fonksiyonlarını bulunuz, grafiklerini çizerek yorumlayınız.

c) $Y = 81$ için k çarpanını bulunuz ve yorumlayınız.

Çözüm:

a) $Y = C + S$ olduğundan $S = Y - C$ olacaktır. O hâlde tasarruf fonksiyonu

$$C = Y - S$$
$$S = Y - C$$
$$S = Y - (5 + 0{,}6.Y + 0{,}4\sqrt{Y})$$
$$S = -5 + 0{,}4.Y - 0{,}4\sqrt{Y}$$



Şekil 14.5: Tüketim ve tasarruf fonksiyonu

Tüketim fonksiyonu gelirin bütün değerleri için pozitif değerler alan artan bir fonksiyondur. Tasarruf fonksiyonu ise Y'nin 16,57 değerinden büyük değerleri için pozitif olmaktadır. Her Y değerinin $Y = C + S$ denklemini sağladığı aşikârdır.

b-) Marjinal tüketim eğilimi tüketim fonksiyonunun Y'ye göretürevidir.

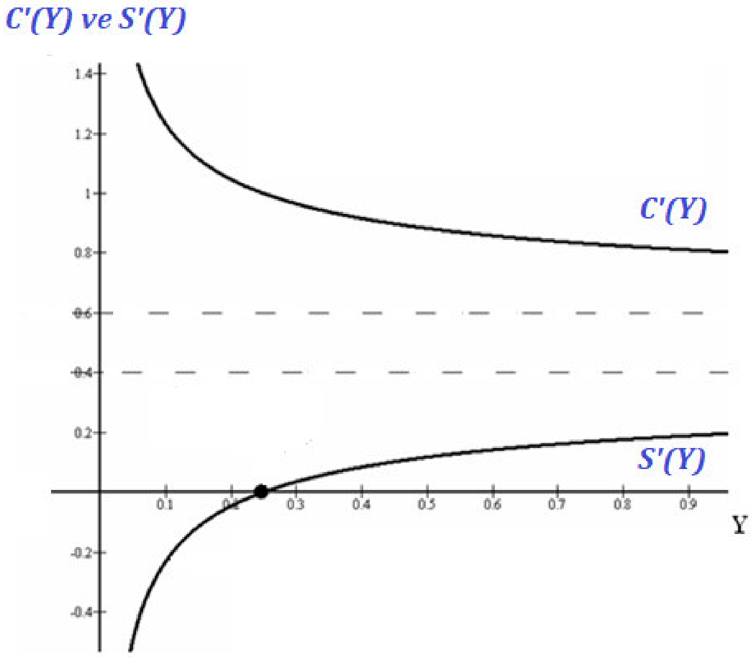
$$\text{Marjinal Tüketim Eğilimi}=\frac{dC}{dY}=C'(Y)$$

$$C'(Y)=\frac{dC}{dY}=0{,}6+\frac{0{,}2}{\sqrt{Y}}$$

$$Marjinal\ Tasarruf\ fonksiyonu=\frac{dS}{dY}=S'(Y)$$

$$S'(Y)=\frac{dS}{dY}=0{,}4-\frac{0{,}2}{\sqrt{Y}}$$

olarak bulunur.



Şekil 14.6: Marjinal Tüketim Eğilimi ve Marjinal Tasarruf Eğilimi

Şekilden de görüleceği üzere marjinal tasarruf fonksiyonu artan olmasına rağmen marjinal tüketim fonksiyonu azalan bir fonksiyondur. Ayrıca marjinal tüketim meyli ile marjinal tasarruf meylinin toplamı da bire eşit çıkmaktadır yani,

$$\frac{dC}{dY}+\frac{dS}{dY}=\left[0,6+\frac{0,2}{\sqrt{Y}}\right]+\left[0,4-\frac{0,2}{\sqrt{Y}}\right]=1$$

c) Çarpan

$$k=\frac{1}{1-\frac{dC}{dY}}=\frac{1}{1-(0,6+\frac{0,2}{\sqrt{Y}})}=\frac{1}{0,4-\frac{0,2}{\sqrt{Y}}}$$

$Y=81$ için;

$$k=\frac{1}{0,4-\frac{0,2}{\sqrt{81}}}=\frac{1}{0,38}=2,63$$

$Y=81$ olduğunda çarpanın değeri 2,63’tür. Bunun anlamı fazladan elde edilen

$$1-0,38\ =\ 0,62$$

lik bir gelir tüketilirse gelirdeki toplam artış ilk harcamaların 2,63 katına eşittir.

Uygulama Soruları

1) Bir ürünün toplam maliyet fonksiyonu $TC(q) = 5q + 20$ olduğuna göre marjinal maliyet fonksiyonunu bulunuz ve yorumlayınız.

Çözüm:

$$MC(q) = \frac{dTC(q)}{dq} = 5$$

Marjinal maliyetin 5 çıkması, ilave bir birim üretimin toplam maliyete 5 birim etkisi olduğunu ifade etmektedir.

2) Toplam tüketim fonksiyonu $C = 100 + 0{,}6(Y - T)$ ve $T = 50 + 0{,}4Y$ ise gelir düzeyi 1000 birim olduğunda toplam tüketim harcaması ne kadardır ?

Çözüm:

Soruda verilmiş olan vergiler denklemini tüketim fonksiyonunda (C) yerine koyarsak;

$$C = 100 + 0.6(Y - (50 + 0.4Y))$$

olur. Soruda gelir düzeyinin (Y) 1000 birim olduğu verilmektedir.

$$C = 100 + 0.6(1000 - (50 + 0.4(1000))$$

$$C = 430$$

3) Negatif eğimli bir talep eğrisine sahip olan ve kâr maksimizasyonu yerine gelir maksimizasyonunu amaçlayan bir firma üretimini hangi noktada gerçekleştirir? (Cevap: **b)**

a) Marjinal Maliyet = Fiyat olduğu noktada

b) Marjinal Maliyet = Marjinal gelir olduğu noktada

c) Marjinal Gelir sıfırdan büyük olduğu noktada

d) Marjinal Gelir sıfırdan küçük olduğu noktada

e) Marjinal Gelirin sıfıra eşit olduğu noktada

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde türev konusunun işletmecilikteki uygulamaları anlatılmıştır. Marjinal maliyet, marjinal gelir kavramları incelenmiştir. Verilen bir üretim, tüketim ve tasarruf fonksiyonlarının türevleri incelenmiştir. Marjinal Tüketim Eğilimi (meyli), Marjinal tasarruf ilişkileri gösterilmiştir.

Bölüm Soruları

1) Aşağıdaki tabloda işçi sayısına göre toplam üretim değerleri verilmiştir. Bu tabloya göre, işgücünün marjinal verimliliği, işçi sayısı kaçtan kaça çıktığında azalmaya başlar?

İşçi Sayısı	**Toplam Üretim**
1	18
2	38
3	60
4	72
5	78
6	80

a) 1'den 2'ye
b) 2'den 3'e
c) 3'ten 4'e
d) 4'ten 5'e
e) 5'ten 6'ya

2) Bir firmanın ürettiği bir ürün için ters talep fonksiyonu $p = 140 - 0{,}08q$ ve toplam maliyet fonksiyonu $TC(q) = 1000 + 60q$ olarak verilsin. Maksimum karı veren satış seviyesini hesaplayınız.
a) 500
b) 520
c) 525
d) 53 0
e) 550

3) Bir ürüne ilişkin toplam maliyet fonksiyonu $TC(q) = 3q + 500$ ise marjinal (son birim) maliyet fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?
a) $MC(q) = 50$
b) $MC(q) = 3$
c) $MC(q) = 3q$
d) $MC(q) = 3p$
e) $MC(q) = 3q + 500$

4) Bir üretim aşamasında toplam maliyet fonksiyonu $TC(q) = 4q^2 + 50q + 600$ şeklinde oluşmuş ise, marjinal maliyet fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?
a) $4q + 50$
b) $4q^2 + 500$
c) 600
d) $4q^2$
e) $8q + 50$

5) Bir ürüne ilişkin toplam gelir fonksiyonu $R(q) = 0{,}07q$ ise marjinal gelir fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

a) $MR(q) = 0$
b) $MR(q) = q$
c) $MR(q) = 0{,}07$
d) $MR(q) = 0{,}07q$
e) $MR(q) = 0{,}07q + 1$

6) TV üretiminin toplam maliyet fonksiyonu $TC(q) = -6q^3 + 300q^2$ şeklinde verildiğinde firmanın ortalama maliyetinin minimum olduğu noktadaki üretim düzeyi kaçtır?
a) 22
b) 23
c) 24
d) 25
e) 26

7) Bir ürünün satışından elde dilen toplam gelir fonksiyonu $R(q) = 20q - 0{,}8q^2$ ise $q = 10$ için marjinal gelir kaç olur?
a) 4
b) 8
c) 10
d) 16
e) 20

8) Milli net gelir sıfır olduğu zaman tüketim 20 Milyar TL olmaktadır. Tüm ekonomi için tüketim; milli net gelire,"her net gelir seviyesinde tüketim 20 Milyar TL, ek olarak ayrıca % 50 net gelirden oluşur" şeklinde doğrusal olarak bağlıdır. Bu tanıma göre tüketim doğrusunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?
a) $y_t = C = \text{Tüketim} = f(y_g) = 20 - 0{,}50y_g$
b) $y_t = C = \text{Tüketim} = f(y_g) = 20 - 0{,}60y_g$
c) $y_t = C = \text{Tüketim} = f(y_g) = 20 + 0{,}60y_g$
d) $y_t = C = \text{Tüketim} = f(y_g) = 1 + 0{,}60y_g$
e) $y_t = C = \text{Tüketim} = f(y_g) = 20 + 0{,}50y_g$

9) Bir ürüne ait ters talep fonksiyonu $p = 500 - 12q$ fonksiyonu ile verilsin. $q = 10$ için marjinal geliri (MR) hesaplayınız.
a) 200
b) 220
c) 240
d) 260
e) 300

10) Bir ürüne ilişkin toplam gelir fonksiyonu $R(q) = -0{,}005q^2 + 6q$ olarak ve toplam maliyet fonksiyonu $TC(q) = 3q + 100$ olarak belirlendiğine göre kârın maksimum olduğu üretim düzeyi kaçtır?
a) 100
b) 300
c) 600
d) 1500
e) 2500

Cevaplar

1) c, 2) a, 3) b, 4) e, 5) c, 6) d, 7) a, 8) e, 9) d, 10) b

KAYNAKÇA

Ahmet Öztürk; Ekonomi ve İşletme Öğrencileri için Matematiksel Analize Giriş (Çeviri), Ekin Kitabevi, 1993

Bülent Kobu; İşletme Matematiği, Altıncı Baskı, Avcıol Basım Yayın, İstanbul, 1997
Dennis G. Zill; Calculus, PWS Publishing Company, Boston, 1993

Enis Sınıksaran, Aylin Aktükün, Alpaslan Akay; İktisatçılar İçin Genel Matematik, Türkmen Kitabevi, 2011

Ergün Eroğlu; Temel Matematik Ders Notları, İÜ İşletme Fakültesi, Avcılar, İstanbul, 2015

Ernest F. Haeussler, Richard S. Paul; Introductory Mathematical Analysis for Business, Economics and the Life and Social Sciences, Tenth Edition, Prentice Hall, USA, 2002

Howard Anton; Elemantary Linear Algebra, Fourth Edition, John Wiley and sons, Canada, 1984

Jean E. Draper, Jane S. Klingman; Mathematical Analysis Business and Economic Applications, Harper and Row, Tokyo, 1967

Kadir Tanır; Açık Öğretim ve Tüm Fakülteler için Genel Matematik, İlkumut Yayınları, Ankara, 2002

Laurence D. Hoffmann, Gerald L. Bradley; Calculus for Business, Economics and the Social and Life Sciences, McGraw Hill, Fourth Edition, USA, 1989

M. Erdal Balaban; Temel Matematik ve İşletme Uygulamaları, Literatür Yayınları, İstanbul, 2004

Mond A. Barnett, Michael R. Ziegler, Karl E. Byleen; Calculus for Business, Economics, Life Sciences and Social Sciences, 12. Basımdan Çeviri, (Editör: Arif Sabuncuoğlu), Nobel Yayınevi, Ankara, 2011

Mustafa Sevüktekin, Zehra Başkaya; Matematiksel Analiz(İşletme Ve Ekonomi Uygulamaları), Türkçe Yayınevi: Dora Yayıncılık, Bursa, 2011

Necdet Tekin, İbrahim Doğan; İktisatçılar ve İşletmeciler için Genel Matematik, Konuralp Ofset, Çemberlitaş, İstanbul, 1989

Raymond A. Barnett, Mivhael R. Ziegler; Calculus for Business, Economics, Life Sciences and Social Sciences, Fifth Edition, Collier Macmillan Publishers, London, 1990

Raymond F. Coughlin, David E. Zitarelli; Calculus with Applications, Saunders Cellege Bublishing, NewYork, 1988

Ronald J. Harshbarger, James J. Reynolds; Mathematical Applications fort he Management, Life and Social Sciences, Sixth Edition, Boston, 2000

Orhan Özer, Yalçın Küçük, Mehmet Üreyen, Nevin Orhun; Genel Matematik, Anadolu Üniversitesi Yayını, 6. Baskı, Eskişehir, 2006

Vakıf Caferov; MEB Açık Öğretim Ders Notları, Üniteler, 03/07/2012, (Çevrimiçi) http:\\www.anadolu.edu.tr/aos/kitap/IOLTP/2285/unite11.pdf

Yılmaz Tulunay; İşletme Matematiği, Nobel Yayın Dağıtım, 4. Baskı, Ankara, 2006